

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta Strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

Řešení úloh volného kroucení v programu Ansys

Solution of St-Venant Torsion Tasks in Ansys Program

Student: Martin Chalupa

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ostrava 2009

Zadání bakalářské práce

Student: **Martin Chalupa**
Studijní program: B2341 Strojírenství
Studijní obor: 3901R003 Aplikovaná mechanika
Téma: **Řešení úloh volného kroucení v programu Ansys**
Solution of St-Venant Torsion Tasks in Ansys Program

Zásady pro vypracování:

1. Popište Saint-Venantovu teorii kroucení a Prandtlůvu membránovou analogii.
2. Prezentujte způsob získání analytického řešení u zvoleného případu s masivním nekruhovým průřezem a tenkostěnným profilem.
3. Navrhněte vhodný způsob simulace úloh volného kroucení prizmatických prutů s nekruhovým průřezem v programu Ansys. Zjistěte konvergenci numerického řešení pro úlohy se známým analytickým řešením.
4. Aplikujte ověřený postup při řešení úlohy s neznámým analytickým řešením.

1. Describe Saint-Venant Torsion Theorem and Prandtl Membrane Analogy.
2. Present the Way to Obtain Analytical Solution of Selected Example with Massive Non-Circular Cross-Section and with Thin-Walled Cross-Section.
3. Suggest Acceptable Way Simulation Examples of Free Torsion Prismatic Bars Non-Circular Cross-Section at Ansys Program. Determine the Convergency of Analytical Solution for Examples with Noted Analytical Solution.
4. Apply Verified Procedure to Solution Example with Unknown Analytical Solution.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Lenert, J.: *Pružnost a pevnost II*, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 1998.
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69*, SNTL, Brno, 1989.
- [3] Timošenko, Š.: *Pružnost a pevnost II*, VTN Praha, Praha, 1951.
- [4] Ansys Inc.: *Documentation for ANSYS Release 11.0*, SAS IP, Inc., 2007.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Martin Fusek, Ph.D.**

Datum zadání: 29.09.2008

Datum odevzdání: 22.05.2009




prof. Ing. Jan Fuxa, CSc.
vedoucí katedry


prof. Ing. Radim Farana, CSc.
děkan fakulty

Prohlášení studenta

Prohlašuji, že jsem celou bakalářskou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě

.....

podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě bakalářskou práci užít (§35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk bakalářské práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího bakalářské práce. Souhlasím s tím, že údaje o bakalářské práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – bakalářskou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě :.....

.....

ANOTACE BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

CHALUPA, M. Řešení úloh volného kroucení v programu Ansys. Ostrava: katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2009, 70 str. Bakalářská práce, vedoucí Fusek, M.

Bakalářská práce se zabývá volným kroucením nekruhových průřezů a to jak u průřezů plných, tak i průřezů tenkostěnných. V úvodu je daná problematika řešena analyticky pomocí Saint-Venantovy teorie a Prandtlovy membránové analogie.

Výsledky analytického řešení jsou pak porovnány s numerickým řešením pomocí výpočtového programu Ansys. U tenkostěnného průřezu jsou výsledky ještě navíc porovnávány s výsledky získané experimentálním měřením v laboratoři.

Na základě porovnání výsledků dochází ke kontrole správné funkčnosti prvku BEAM 188 používaného v programu Ansys a jeho následnému použití při řešení průřezu s neznámým analytickým řešením.

ANNOTATION of BACCALAUREATE THESIS

CHALUPA, M. Loose torsion in ANSYS program's problems solutions.

Ostrava: Department of Elasticity and Strength, Faculty of Mechanical Engineering VSB – TU Ostrava, 2009, 70 pages. Baccalaureate Thesis, leader Fusek, M.

Baccalaureate thesis deals with loose torsion of non-circular sections, both of solid sections and thin-walled sections. In introduction, the given issue is solved analytically through the use of Saint-Venant's theory and Prandtl's membrane analogy.

Results of analytic solution are then compared with numeric solution by means of computing program ANSYS. In addition to it, the results relating to thin-walled section are compared with results gained by experimental measuring in the laboratory.

On the basis of results' comparison happens the control of proper functioning of BEAM 188 element, used in ANSYS program, and its subsequent use in solving of section with unknown analytic solution.

OBSAH BAKALÁŘSKÉ PRÁCE:

SEZNAM POUŽITÉHO ZNAČENÍ	13
KROUCENÍ TYČÍ S NEKRUHOVÝM PRŮŘEZEM	18
1. Sain-Venantova teorie krutu	18
1.1. Přetvoření	18
1.2. Stav napjatosti	20
1.3. Rovnice rovnováhy	22
1.4. Výslednice vnitřních sil	24
1.5. Vrchlík napětí	26
1.6. Stanovení krotícího momentu pomocí vrchlíku napětí	28
1.7. Stokesova poučka pro kroucení	29
2. Prandlova membránová analogie	33
3. Odvození analytického řešení daných profilů	36
3.1. Kroucení plného obdélníkového průřezu	36
3.2. Kroucení tenkostěnného obdélníkového profilu	38
4. Řešení plného obdélníkového profilu	43
4.1. Rozměry profilu a okrajové podmínky	43
4.2. Analytické řešení	43
4.3. Numerické řešení pomocí programu Ansys	45
4.4. Porovnání analytického a numerického řešení	49
5. Řešení tenkostěnného obdélníkového profilu	50
5.1. Rozměry profilu a okrajové podmínky	50
5.2. Analytické řešení	50
5.3. Experimentální měření pomocí tenzometru v místě A	53
5.4. Numerické řešení pomocí programu Ansys	55
5.5. Porovnání analytického řešení s numerickým a s experimentem	61
6. Použití numerického řešení na profilu s neznámým analytickým řešením	63
7. Závěrečné zhodnocení	68
8. Seznam použitých pramenů	69
9. Poděkování:	70

Seznam použitého značení

Symbol	Popis	Jednotka
A	Výstupní napětí při kalibraci	V
$A_{\tilde{R}}$	Analytické řešení	-
C	Střednice	-
C_1	Integrační konstanta	-
C_2	Integrační konstanta	-
C_z	Citlivost zesilovače	mV/V
E	Modul pružnosti v tahu	MPa
F	Funkce napětí	N/mm
F_x	Funkce napětí ve směru x	N/mm
F_y	Funkce napětí ve směru y	N/mm
F_z	Funkce napětí ve směru z	N/mm
G	Modul pružnosti ve smyku	MPa
J_k	Kvadratický moment průřezu	mm ⁴
K	Deformační součinitel tenzometru	N/mm
L	Délka zkrucované tyče	mm
M_k	Krouticí moment	Nmm
$\overline{MM'}$	Vzdálenost bodu M a M'	mm
$N_{\tilde{R}}$	Numerické řešení	-
O_U	Obvod střednice	mm
Q_z	Smykový tok	MPa
R_1	Poloměr křivosti ve směru y	mm
R_2	Poloměr křivosti ve směru z	mm
ROTX	Rotace ve směru x	rad
ROTY	Rotace ve směru y	rad
ROTZ	Rotace ve směru z	rad
S_a	Soumezná smyková čára	-

S_b	Soumezná smyková čára	-
S_U	Plocha střednice	mm^2
S_I	Smyková čára	-
S_2	Smyková čára	-
U_a	Naměřená hodnota ve směru a	V
U_b	Naměřená hodnota ve směru b	V
U_c	Naměřená hodnota ve směru c	V
U_S	Plocha střednice	mm^2
U_X	Posunutí ve směru x	mm
U_Y	Posunutí ve směru y	mm
U_Z	Posunutí ve směru z	mm
V	Objem vrchlíku napětí	mm^3
W_k	Modul průřezu v krutu	mm^3
Z	Hmotnost závaží při experimentu	kg
b	Výška profilu	mm
$f(y,z)$	Funkce souřadnic	-
h	Šířka profilu	mm
n	Počet aktivních tenzometrů	-
p	Tlak na membránu	MPa
t	Tloušťka stěny	mm
u	Posunutí ve směru x	mm
v	Posunutí ve směru y	mm
w	Posunutí ve směru z	mm
x	Vzdálenost ve směru osy x	mm
y	Vzdálenost ve směru osy y	mm
y_0	Souřadnice střednice	mm
z	Vzdálenost ve směru osy z	mm
z_0	Souřadnice střednice	mm
α	Úhel natočení	°

β	Úhel sklonu tečného napětí k vrchlíku	°
γ	Součinitel pro výpočet plného profilu	-
δ	Součinitel pro výpočet plného profilu	-
ε_a	Poměrné deformace z experimentu v místě a	-
ε_b	Poměrné deformace z experimentu v místě b	-
ε_c	Poměrné deformace z experimentu v místě c	-
ε_x	Poměrné deformace ve směru x	-
ε_y	Poměrné deformace ve směru y	-
ε_z	Poměrné deformace ve směru z	-
λ	Součinitel pro výpočet plného profilu	-
Φ	Úhel natočení volného konce	rad
γ_{xy}	Zkos ve směru roviny xy	-
γ_{xz}	Zkos ve směru roviny xz	-
φ	Úhel natočení řezů vzdálených od sebe o x	rad
ϑ	Úhel zkroucení	1/mm
μ	Poissonovo číslo	-
Θ	Poměrná změna objemu	-
ρ	Poloměr zakřivení smykové čáry	mm
σ_1	První hlavní napětí	MPa
σ_2	Druhé hlavní napětí	MPa
σ_3	Třetí hlavní napětí	MPa
σ_x	Normálová napětí ve směru x	MPa
σ_y	Normálová napětí ve směru y	MPa
σ_z	Normálová napětí ve směru z	MPa

τ	Výsledné smykové napětí	MPa
τ_n	Normálová složka napětí	MPa
τ_s	Napětí na střednici	MPa
τ_t	Tečná složka napětí	MPa
τ_{xy}	Smyková napětí ve směru xy	MPa
τ_{xz}	Smyková napětí ve směru xz	MPa

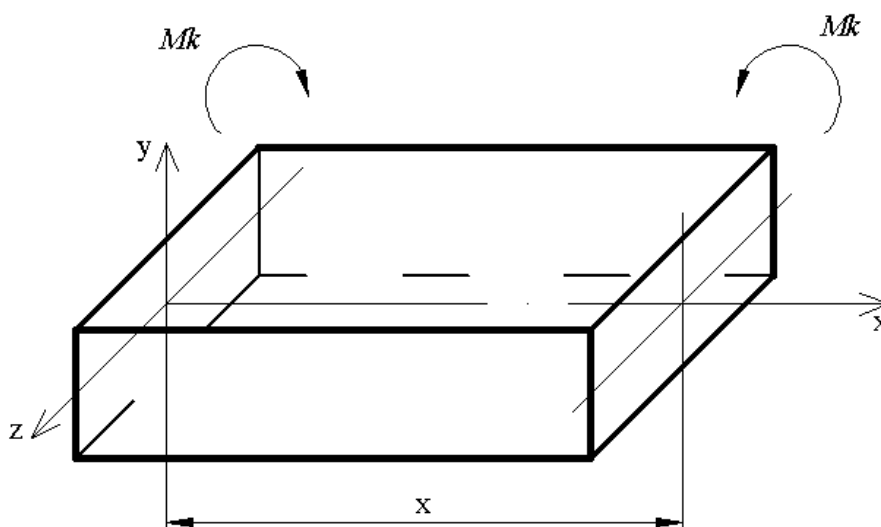
Kroucení tyčí s nekruhovým průřezem

S první teorií jak řešit kroucení tyčí s nekruhovým průřezem přišel pan Louis Marie Henry Navier z Francie.¹⁾ Došel k závěru, že polární moment setrvačnosti daného průřezu je nepřímo úměrný zkrutu, že maximální napětí jsou v místech nejvíce vzdálených od těžiště. Tato teorie pro nekruhové průřezy, ale neodpovídala okrajovým podmínkám. Na to upozornil a správnou teorii odvodil až jeho žák hrabě Barré de Saint-Venant.²⁾ Ten si ve své teorii, kterou se budeme zabývat dále povšiml, že předpoklad o zachování rovinnosti průřezů nemůže platit a je tedy nutné upustit od některých Navierihových předpokladů.

1. Sain-Venantova teorie krutu

1.1. Přetvoření

Namáháme-li profil nekruhového průřezu (Obr. 1.1.1) na čelech výslednou silovou dvojicí Mk , dochází k tomu, že se všechny příčné řezy natočí.



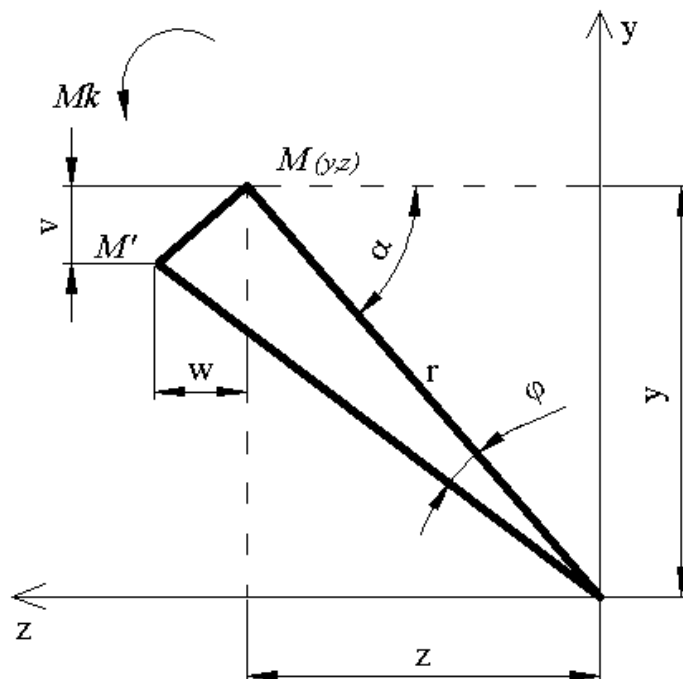
Obr. 1.1.1

Na rozdíl od kruhových průřezů tady dojde ještě i k přetvoření příčných řezů neboli zdeplanování. Body jakéhokoliv vlákna, které je rovnoběžné s podélnou osou se posunou o hodnotu u . Tato hodnota je pro všechny příčné řezy tohoto vlákna stejná. Toto posunutí u

¹⁾ L.M.H. Navier (1785 – 1836): *Résumé des leçons sur l'application de la mécanique*. 3. vyd. Paris 1864

²⁾ Hrabě Barré de Saint-Venant (1797 – 1886): *Mémoires des savants*, sv.14, 1855

závisí na souřadnicích y a z , které určují příčný průřez. Nezávisí tedy na souřadnici x , protože ta má směr podélné osy prutu. Dané vzorce vychází z obrázku (Obr. 1.1.2).



Obr. 1.1.2

Saint-Venant předpokládal, že v kroucené tyči nevzniknou normálová napětí. Tedy musí potom platit:

$$\sigma_x = 0 \quad \sigma_y = 0 \quad \sigma_z = 0 \quad (1.1.1)$$

Využitím Hookova zákona pak dostaneme:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.1.2)$$

Pro pootočení řezů vzdálených od sebe o x musí potom platit:

$$\varphi = \vartheta \cdot x \quad (1.1.3)$$

Kde ϑ je poměrný úhel zkroucení.

Z obrázku (Obr. 1.1.2) dále vyplývají vztahy:

$$z = r \cdot \cos \alpha \quad y = r \cdot \sin \alpha \quad \overline{MM'} = \vartheta \cdot x \cdot r \quad (1.1.4)$$

Dále z Hookova zákona víme, že pro předpoklad jediného nenulového napětí dostaneme pouze dva nenulové zksoy γ_{xy} a γ_{xz} . Aby byla splněna tato podmínka, tak zvolíme posuvy:

$$\begin{aligned} u &= u(y, z) \\ v &= -\vartheta \cdot x \cdot r \cdot \cos \alpha = -\vartheta \cdot x \cdot z = -\vartheta \cdot x \cdot (z - z_0) \\ w &= \vartheta \cdot x \cdot r \cdot \sin \alpha = \vartheta \cdot x \cdot y = \vartheta \cdot x \cdot (y - y_0) \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Kroutící moment působí proti kladnému smyslu y, proto musíme mít záporný posuv v. Konstanty y_0 a z_0 jsou souřadnice střednice krutu. Tato střednice zůstává i po deformaci přímá, zatímco okolní vlákna se podle rovnic (1.1.5) přetvoří do šroubovic. Průměty se pootočí, ale v rovině kolmé k ose x zůstanou kolmé.

Zvolíme-li velmi malé konečné x a malý úhel zkroucení ϑ , tak splníme podmínku, aby úhel pootočení řezů φ byl velmi malý. Dosáhneme tak stejného přetvoření všech úseků tyče délky x.

1.2. Stav napjatosti

Zavedeme si rovnici pro poměrnou změnu objemu:

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.2.1)$$

Vezmeme-li nyní konstituční rovnice a dosadíme do nich poměrná prodloužení z rovnic (1.1.2) a (1.2.1) dostaneme rovnice popisující vztah v elementární krychliče (obr. 1.2.1):

$$\sigma_x = 2 \cdot G \cdot \left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2 \cdot \mu} \cdot \Theta \right) = 0$$

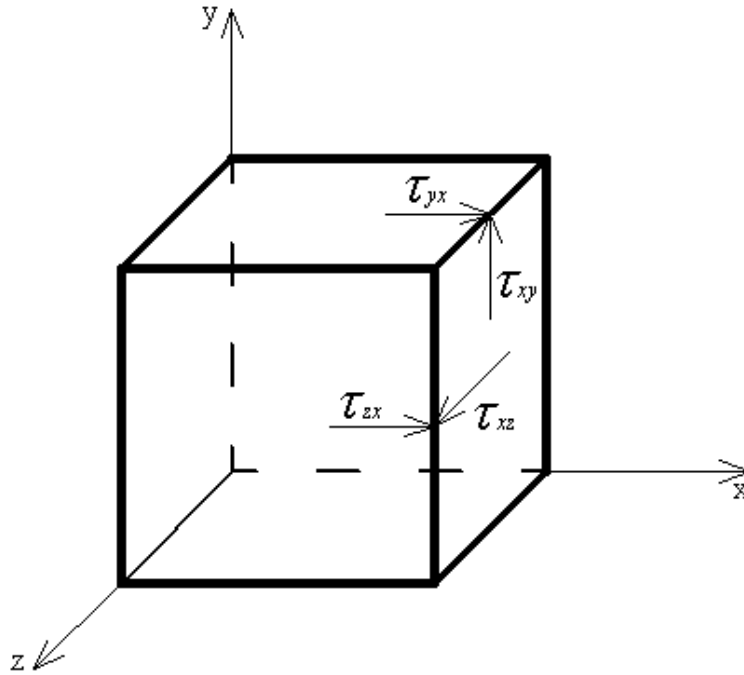
$$\sigma_y = 2 \cdot G \cdot \left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2 \cdot \mu} \cdot \Theta \right) = 0$$

$$\sigma_z = 2 \cdot G \cdot \left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2 \cdot \mu} \cdot \Theta \right) = 0 \quad (1.2.2)$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} = G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} - v_z \right)$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = G \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = G \cdot (-v_x + v_x) = 0$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} = G \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \cdot \left(v_y + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1.2.3)$$



Obr. 1.2.1

Na elementární krychliče (Obr. 1.2.1), která je orientována v souřadném systému $x y z$ je vidět, že podélné řezy rovnoběžné s osou x neobsahují normálová napětí. Smyková napětí na příčných řezech jsou kolmá k podélné ose a mají obecný směr.

1.3. Rovnice rovnováhy

Z předešlých rovnic (1.2.2) a (1.2.3) nám vyšly $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Vidíme tedy, že posuv u lze brát jako funkci souřadnic $u = f(y, z)$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

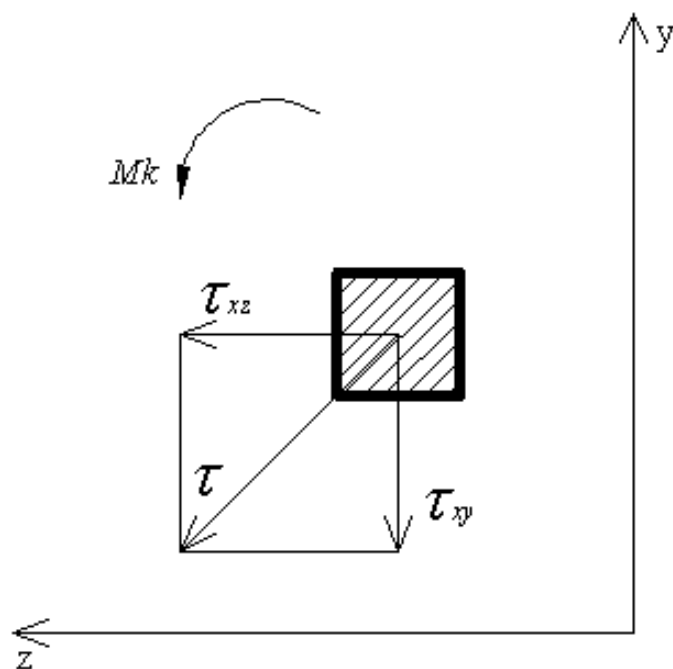
Z rovnic (1.3.1) využijeme tedy první rovnici a po dosazení nulových objemových sil dostaneme:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\tag{1.3.2}$$

Další dvě rovnice jsou nulové. Rovnice rovnováhy (1.3.1) budou splněny, zavedením funkcí napětí $F(y, z)$, tak aby platilo:

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z}\tag{1.3.3}$$

Tyto funkce se nazývají funkcemi napětí. Záporné znaménko u τ_{xz} vychází z obrázku 1.3.1.



Obr. 1.3.1

Rovnice kompatibility získáme z derivováním první rovnice rovnováhy (1.3.1) podle z a třetí podle y a jejich vzájemného rozdílu. Za rovnici kompatibility pak můžeme považovat rovnici:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = -2 \cdot G \cdot \vartheta \quad (1.3.4)$$

Ze zákona o sdruženosti smykových napětí nám plynou okrajové podmínky, které musí být splněny. Vezmeme-li nyní funkce napětí (1.3.3) a dosadíme je do rovnice kompatibility (1.3.4) dostaneme totální diferenciál funkce:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy = dF = 0 \quad (1.3.5)$$

Protože totální diferenciál funkce napětí je na obrysu roven nule, tak funkce napětí na obrysu je rovna:

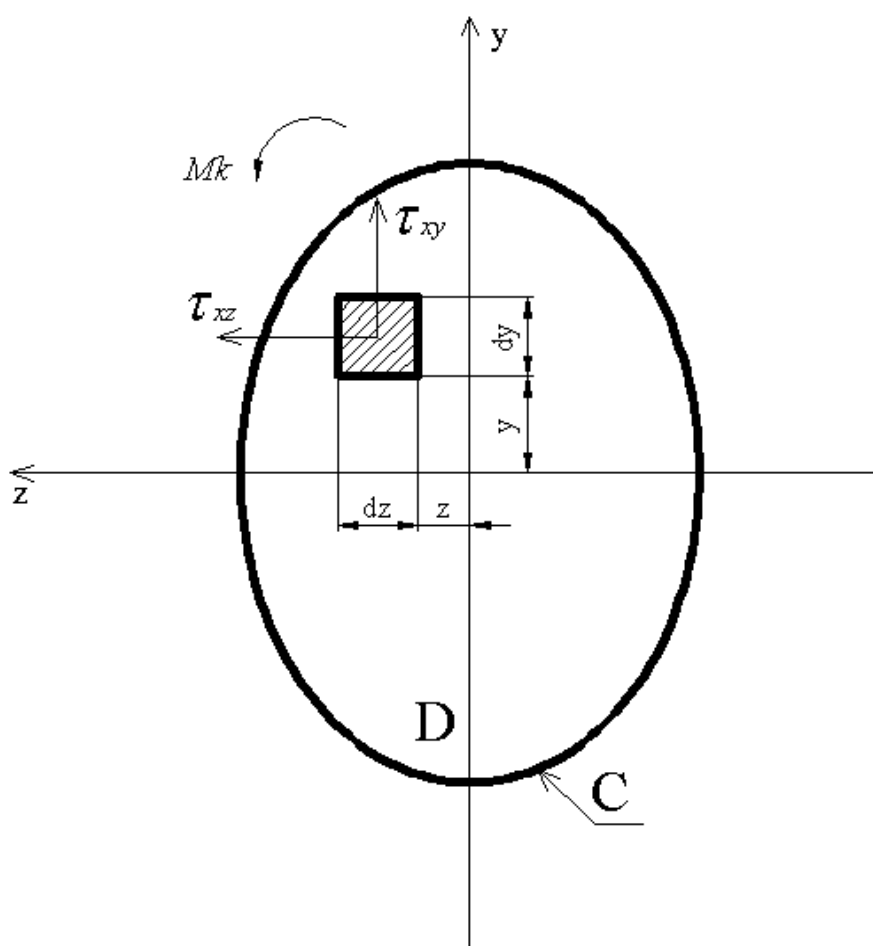
$$F(y_0, z_0) = K = konst \quad (1.3.6)$$

Pro prut vícenásobného dutého průřezu, pak musí být podmínka (1.3.5) splněna na obrysu každé části. Dostaneme tedy pro n částí n různých konstant K . Řešení těchto rovnic je ale velmi složité. Pro přesné výsledky tedy musíme zvolit experiment nebo se spokojit pouze s přibližným řešením.

Snadno lze vyřešit pouze takové průřezy, které splňují podmínku:

$$\nabla^2 f(y, z) = C \neq 0 \quad (1.3.7)$$

1.4. Výslednice vnitřních sil



Obr. 1.4.1

Z obrázku (Obr. 1.4.1) vychází kroutící moment Mk jako:

$$Mk = \iint_{(D)} (\tau_{xz} \cdot y - \tau_{xy} \cdot z) dy dz \quad (1.4.1)$$

Dosazením za smykové napětí z rovnice (1.3.3) dostaneme rovnici:

$$Mk = -\int dz \cdot \int y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy - \int z \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz = \iint_{(D)} \left(-\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y - \frac{\partial F}{\partial z} \cdot z \right) \cdot dydz \quad (1.4.2)$$

Z okrajových podmínek (1.3.5) nám vyplývají rovnice:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F}{\partial z} \cdot z &= F - \frac{\partial(Fz)}{\partial z} \\ -\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y &= F - \frac{\partial(Fy)}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

A pomocí Greenovy věty³⁾ dostaneme rovnici:

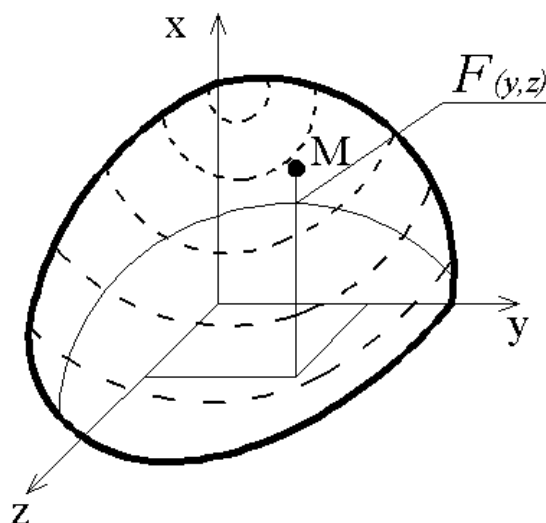
$$Mk = 2 \cdot \iint_{(D)} F dydz + \oint_{(C)} Fz dy - \oint_{(C)} Fy dz \quad (1.4.4)$$

Z předchozích poznatků víme, že na obrysu plného průřezu je $F(y,z) = 0$. Pak nám i oba křivkové integrály musí vyjít nulové. Dostaneme tedy rovnici splňující v oblasti platnosti lineární teorie pružnosti kinematické vztahy, Hookův zákon, rovnice rovnováhy a okrajové podmínky. Bude-li těleso bez vnitřních pnutí a nezátíženo je řešení jednoznačné:

$$Mk = 2 \cdot \iint_{(D)} F dydz \quad (1.4.5)$$

³⁾ Greenova věta: $\iint_{(D)} \left(\frac{\partial Q(y,z)}{\partial y} - \frac{\partial P(y,z)}{\partial z} \right) dydz = \oint_{(D)} (Q(y,z)dz + P(y,z)dy)$

1.5. Vrchlík napětí



Obr.1.5.1

Na obrázku (Obr. 1.5.1) vidíme, že každý bod v příčném průřezu je určen funkcí $F(y, z)$. Dále musí tato funkce být jednoznačná a spojitá a to i pro její derivaci. Vyneseme-li nyní každý bod ve směru osy x dostaneme vrchlík napětí, který má na obrysu nulovou hodnotu.

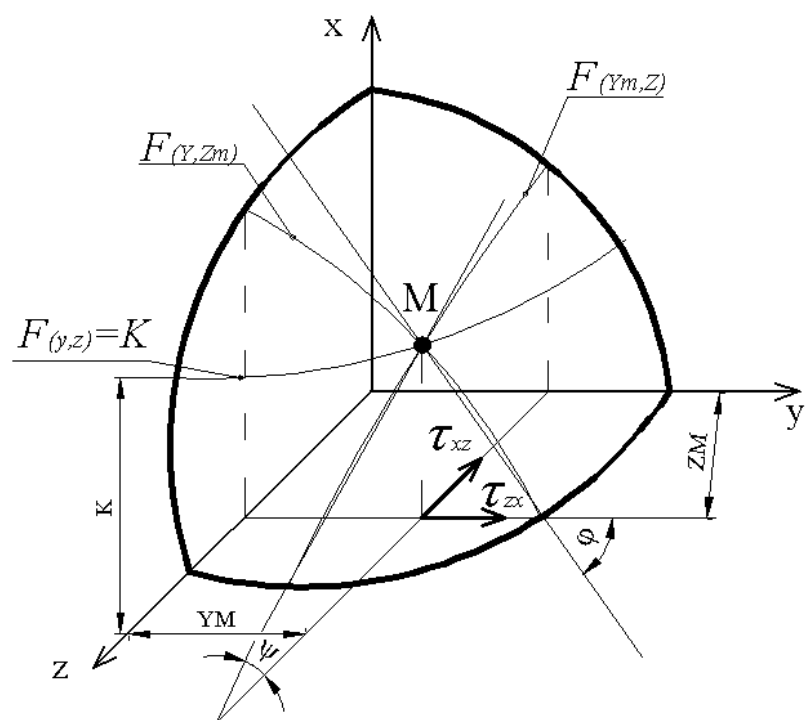
Vezmeme-li nyní roviny rovnoběžné s rovinou řezu a protneme jimi vrchlík. Vzájemná vzdálenost mezi rovinami bude $x = K$. Pak dostaneme vrstevnice vrchlíku napětí, které nám určuje rovnice:

$$F(y, z) = K \quad (1.5.1)$$

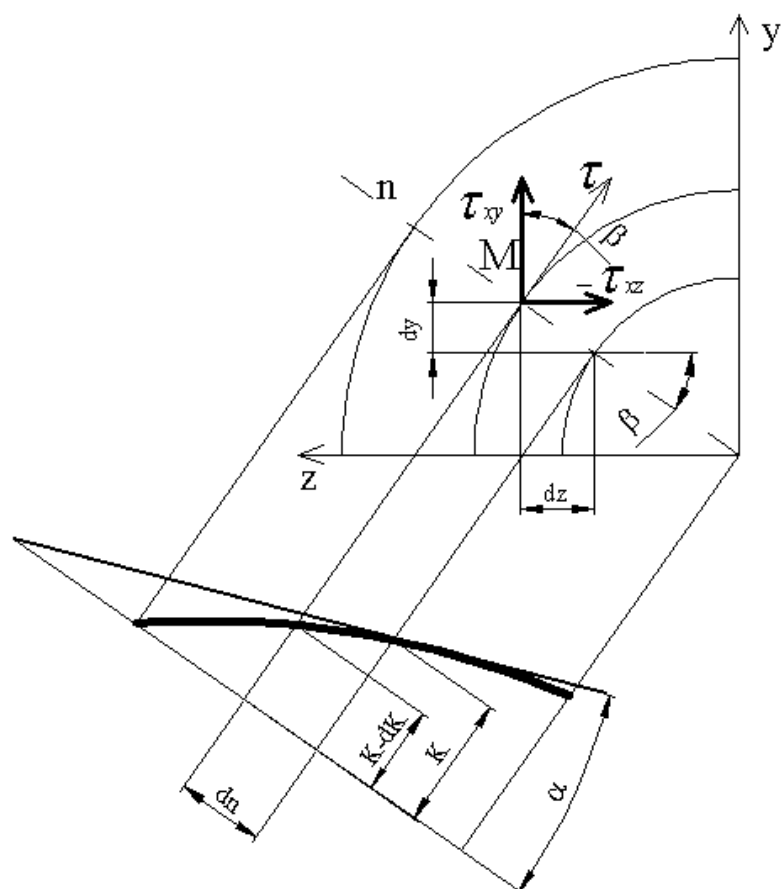
Dosazením do rovnice (1.3.5) a úpravě pak dostaneme:

$$\frac{dy}{dz} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{xz}} \quad (1.5.2)$$

Z této rovnice (1.5.2) je jasné, že výsledné smykové napětí musí být tečnou k vrstevnici. Vrstevním proto také někdy říkáme smykové čáry. Na obrázku (Obr. 1.5.2) je poté patrné, že v bodě $M(y, z)$ je výsledné napětí dáno sklonem normály v rovině vrchlíku, kterou získáme jako kolmici k tečně vrstevnice procházející tímto bodem.



Obr. 1.5.2



Obr. 1.5.3

Z obrázku (Obr. 1.5.3) lze odvodit rovnici pro funkci napětí:

$$\tau = \tau_{xy} \cdot \cos \beta - \tau_{xz} \cdot \sin \beta \quad (1.5.3)$$

Když do této rovnice (1.5.3) dosadíme $\sin \beta = \frac{dy}{dn}$ a $\cos \beta = \frac{dz}{dn}$ dostaneme rovnici:

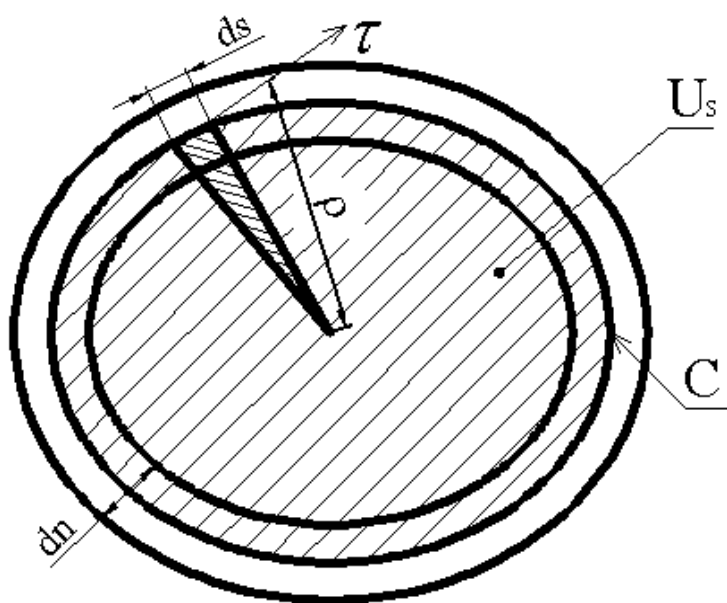
$$\tau = \tau_{xy} \cdot \frac{dz}{dn} - \tau_{xz} \cdot \frac{dy}{dn} = \frac{dF}{dn} = -\tan \alpha = \frac{dK}{dn} \quad (1.5.4)$$

Pak pro dvě blízko sebe ležící smykové čáry musí platit vztah:

$$\tau \cdot dn = dK = konst \quad (1.5.5)$$

Z výše uvedených vztahů vyplývá, že se změnou vzdálenosti vrstevnic dn se musí nutně změnit i smyková napětí, tak aby splnila podmínku podle rovnice (1.5.4).

1.6. Stanovení krotícího momentu pomocí vrchlíku napětí



Obr. 1.6.1

Působí-li mezi dvěma smykovými čarami kroutící moment (Obr. 1.6.1), tak pak ho lze zapsat rovnicí:

$$dMk = \oint_{(C)} \tau \cdot \rho \cdot dnds \quad (1.6.1)$$

Provedeme-li nyní integraci po délce střednice C , dostaneme vztah pro nekonečně malý kroutící moment dMk :

$$dMk = dK \cdot \oint_{(C)} \rho \cdot ds = 2 \cdot U_s \cdot dK \quad (1.6.2)$$

Z integrujeme-li rovnici (1.6.2) po celém průřezu dostaneme výsledný moment rovný dvojnásobku objemu vrchlíku napětí.

$$Mk = 2 \cdot \int_0^K U_s \cdot (K) dK = 2 \cdot V \quad (1.6.3)$$

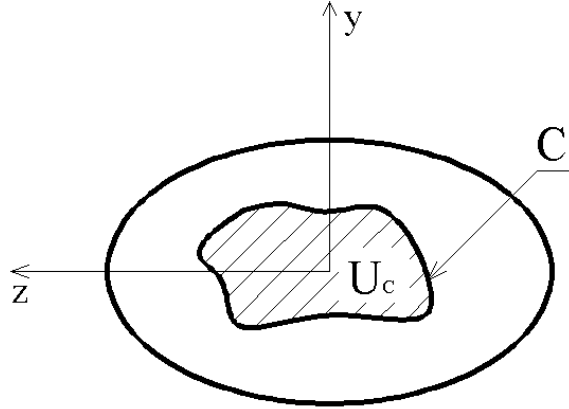
1.7. Stokesova poučka pro kroucení

Je pojmenována po Georgeovi Gabrielovi Stokesovi⁴⁾, ačkoliv poprvé tuto větu pravděpodobně zformuloval William Thomson⁵⁾. Vybereme-li v příčném řezu souvislou uzavřenou křivku C , tak aby každý bod měl určitou hodnotu $u(y,z)$ a $du(y,z)$ – viz Obr.1.7.1. Pak musí platit:

$$\sum du = 0 \quad (1.7.1)$$

⁴⁾ George Gabriel Stokes: (13.8.1819 – 1.2.1903), Irsko

⁵⁾ William Thomson (později Lord Kelvin): (26.6.1824 – 17.12.1907), Irsko



Obr. 1.7.1

V limitě potom dostaneme:

$$\oint_{(C)} du = \oint_{(C)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot dz \right) = 0 \quad (1.7.2)$$

Po dosazení z rovnice (1.2.3) a úpravě dostaneme:

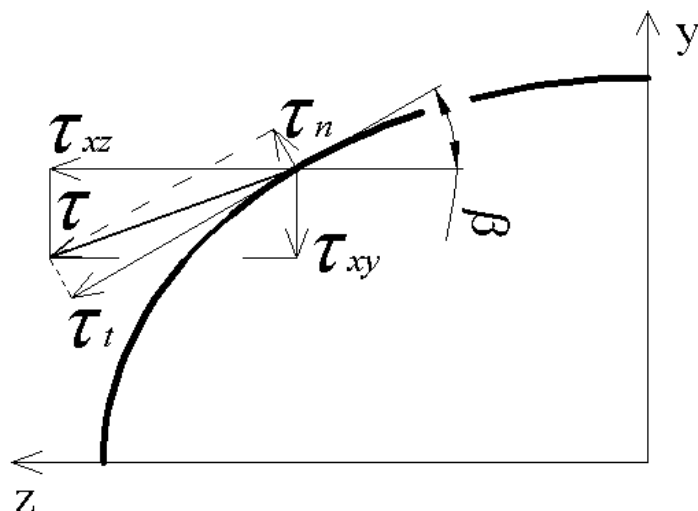
$$\oint_{(C)} (\tau_{xy} dy + \tau_{xz} dz) = G \cdot \vartheta \cdot \left(\oint_{(C)} y dz - \oint_{(C)} z dy \right) \quad (1.7.3)$$

Po použití Greenovy věty přejde rovnice (1.7.3) do tvaru:

$$\oint_{(C)} (\tau_{xy} dy + \tau_{xz} dz) = G \cdot \vartheta \cdot \left(\iint_{(U_C)} (1+1) dy dz \right) = G \cdot \vartheta \cdot U_C \quad (1.7.4)$$

Kde U_C je plocha uvnitř křivky C .

Křivka C je libovolná čára, tak i smykové napětí má obecný směr. Toto napětí lze pak rozložit do dvou směrů – tečny a normály ke křivce C (Obr. 1.7.2).



Obr. 1.7.2

Z obrázku (Obr. 1.7.2) dostaneme rovnici (1.5.3) a po dosazení $\sin \beta = \frac{dy}{dn}$ a $\cos \beta = \frac{dz}{dn}$ dostaneme rovnici:

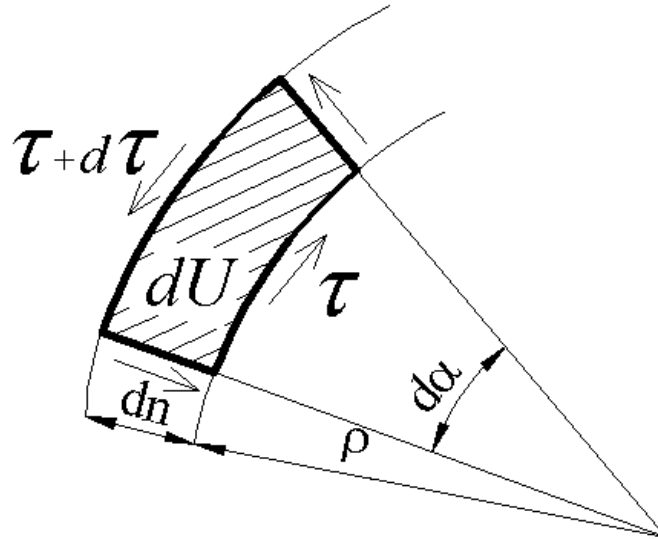
$$\tau_t ds = \tau_{xy} dz + \tau_{xz} dy \quad (1.7.5)$$

Z rovnice (1.7.5) vyplyne obecná Stokesova poučka pro kroucení (1.7.6), která nám říká: „Křivkový integrál tečné složky smykového napětí podél libovolné uzavřené křivky v příčném průřezu je úměrný ploše U_C .“

V případě že je křivka smyková čára, pak je $\tau_t = \tau$.

$$\oint_{(C)} \tau_t ds = 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot U_C \quad (1.7.6)$$

Vytvořme nyní křivku C dle obrázku (1.7.3) a to tak, že ji omezíme dvěma smykovými čarami vzdálenými o dn a dvěma radiálními paprsky svírajícími úhel $d\alpha$. Poloměr zakřivení vnitřní smykové čáry nechť je potom ρ .



Obr. 1.7.3

Protože vzniklá plocha C má nyní nekonečně malé rozměry, můžeme nahradit křivkový integrál v rovnici (1.7.6) součtem a dostaneme:

$$(\tau + d\tau) \cdot (\rho + dn) \cdot d\alpha - \tau \cdot \rho \cdot d\alpha = 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot \rho \cdot d\alpha dn \quad (1.7.7)$$

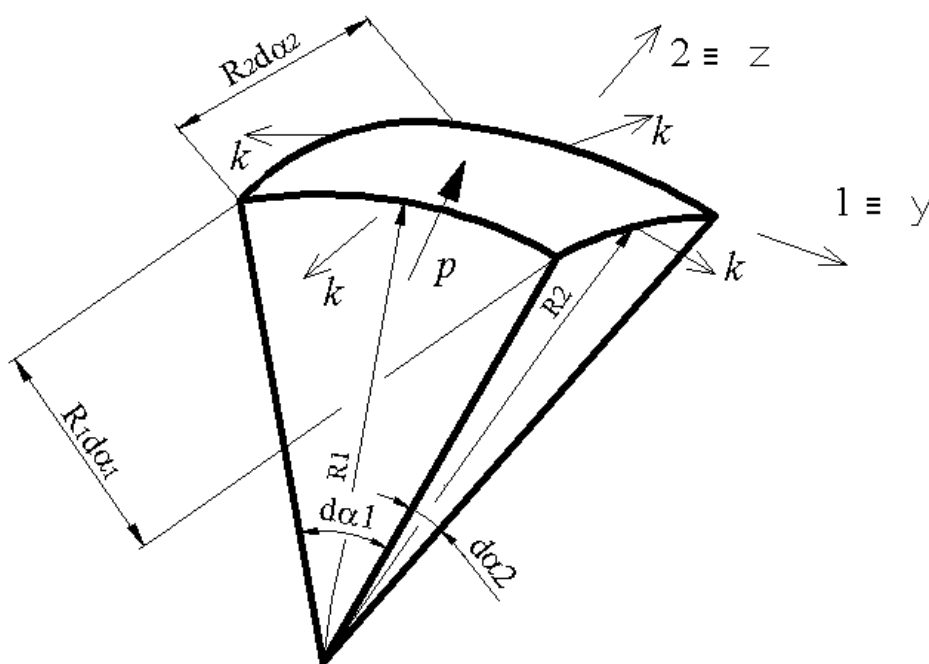
Což po roznásobení nám dá Elementární Stokesovu poučku pro kroucení (1.7.8), kterou využíváme hlavně pro kontrolu místního smykového napětí v rozích řezu tenkostěnných profilů.

$$\frac{\tau}{\rho} + \frac{d\tau}{dn} = 2 \cdot G \cdot \vartheta \quad (1.7.8)$$

2. Prandlova membránová analogie

Saint-Venantova teorie řeší problematiku krutu pouze pro některé jednoduché případy průřezů (kruh, elipsa...). Pro ostatní průřezy je řešení velmi zdlouhavé a složité, protože funkce napětí je vyjádřena složitou plochou. Pro řešení této plochy potom musíme využít aplikace nekonečných řad. Z tohoto důvodu nahrazujeme matematické řešení funkce napětí řešením experimentálním. Pro praxi byl tedy významný objev L. Prandtl⁶⁾, který poukázal na podobnost vrchlíku napětí s fyzikálním vrchlíkem membrány napnuté v rovině rámu a z jedné strany zatížené mírným přetlakem p . Popis těchto dvou vrchlíků je formálně stejný. Navíc vytvoříme-li blánu z mýdlového roztoku v daném rámu, tak je blána dokonale ohebná (nepřenáší skořepinová napětí). Navíc působící síla F na jednotku délky je stejně velká pro jakkoliv vedený řez.

Působením konstantního přetlaku p dojde k průhybu membrány. Vyjmeme-li nyní z jejího povrchu nekonečně malý element (Obr. 2.1).



Obr. 2.1

⁶⁾ Ludwig Prandtl: (1875 – 1953), Physikalische Zeitschrift

Nyní budeme předpokládat velmi malou křivost membrány ($1/p$) a její malou tloušťku. Potom lze napsat podmínku rovnováhy ve tvaru:

$$k \cdot R_1 \cdot d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 + k \cdot R_2 \cdot d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 = p \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot d\alpha_1 \cdot d\alpha_2 \quad (2.1)$$

Křivost membrány ve směru os y a z lze odvodit z obrázku 2.1.

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{\partial^2 w_{(Y,Z)}}{\partial^2 y} \quad \frac{1}{R_2} = -\frac{\partial^2 w_{(Y,Z)}}{\partial^2 z} \quad (2.2)$$

Po dosazení z rovnic (2.2) do podmínky rovnováhy (2.1) a úpravě dostaneme:

$$\frac{\partial^2 w_{(Y,Z)}}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 w_{(Y,Z)}}{\partial^2 z} = -\frac{p}{k} \quad (2.3)$$

Tato rovnice (2.3) je analogicky stejná s rovnicí kompatibility (1.3.4). Nulové prohnutí membrány je zase analogicky stejné s okrajovou podmínkou $F = 0$ na hranici průřezu.

$$F(y, z) \cong w(y, z) \quad (2.4)$$

$$\frac{p}{k} \cong 2 \cdot G \cdot \vartheta \quad (2.5)$$

Uvedené veličiny jsou ve smyslu analogie odpovídají číselně, ale jejich fyzikální rozměr se liší. Bude-li tedy na membránu působit tlak:

$$p = \frac{2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot k}{C} \quad (2.6)$$

Kde C je koeficient úměrnosti.

Pak musí platit tyto podmínky:

- funkce napětí je úměrná průhybu membrány

$$F(y, z) = C \cdot w(y, z) \quad (2.7)$$

- v libovolném bodě je velikost napětí úměrná maximálnímu sklonu membrány v daném bodě:

$$\tau = C \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial w_{(Y,Z)}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_{(Y,Z)}}{\partial z}\right)^2}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} = -C \cdot \frac{\partial w_{(Y,Z)}}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} = C \cdot \frac{\partial w_{(Y,Z)}}{\partial y} \quad (2.8)$$

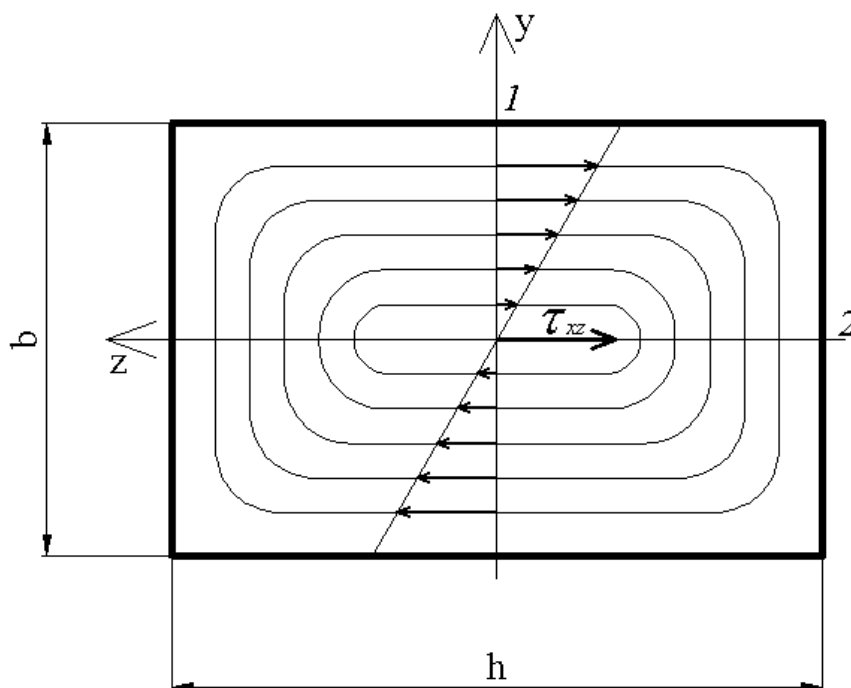
- velikost kroutícího momentu lze vypočítat jako dvojnásobek objemu membrány

$$Mk = 2 \cdot C \cdot \iiint_{(V)} dV = 2 \cdot C \cdot V \quad (2.9)$$

3. Odvození analytického řešení daných profilů

3.1. Kroucení plného obdélníkového průřezu

Při řešení obdélníkového průřezu, který má velký poměr stran h/b využíváme zjednodušení, že τ_{xy} není závislé na souřadnici z . Smykové čáry jsou potom rovnoběžné s osou z a to s výjimkou konců delších stran (Obr. 3.1.1).



Obr. 3.1.1

Z obrázku (Obr. 3.1.1) plynou vztahy:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1.1)$$

Obdobně pak z rovnice (1.3.3):

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial F}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} \quad (3.1.2)$$

Použitím rovnice (1.3.3) a dosazením do rovnice kompatibility (1.3.4) dostaneme:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2 \cdot G \cdot \vartheta \quad (3.1.3)$$

Při splnění předpokladů, že τ_{xz} je funkcí pouze souřadnice y je rovnice (3.1.3) rovna:

$$d\tau_{xz} = 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot dy \quad (3.1.4)$$

Což po z integrování je:

$$\tau_{xz} = 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot y + C \quad (3.1.5)$$

Kde C je integrační konstanta plynoucí z obrázku (Obr.3.1.1). Zde vidíme, že pro $y = 0$ je i $\tau_{xz} = 0$. Z toho vyplývá, že i integrační konstanta C musí být rovna nule.

Funkci napětí F lze potom spočítat dosazením τ_{xz} do rovnice (3.1.2) jako:

$$F = -G \cdot \vartheta \cdot y^2 + K \quad (3.1.6)$$

Kde konstantu K dostaneme z okrajových podmínek:

$$K = G \cdot \vartheta \cdot \frac{b^2}{4} \quad (3.1.7)$$

Funkce napětí dlouhého obdélníku je potom:

$$F(y) = G \cdot \vartheta \cdot b^3 \cdot h \quad (3.1.8)$$

Kroutící moment poté spočítáme pomocí vrchlíku napětí ve tvaru parabolického válce.

$$M_k = \frac{1}{3} \cdot G \cdot \vartheta \cdot b^3 \cdot h \quad (3.1.9)$$

Z kroutícího momentu lze poté snadno dopočíst poměrný úhel zkroucení.

$$\vartheta = \frac{3 \cdot Mk}{G \cdot b^3 \cdot h} \quad (3.1.10)$$

Z obrázku (Obr. 3.1.1) také vidíme, že maximální složky napětí v jednotlivých směrech jsou v místech 1 a 2. Tedy lze napsat:

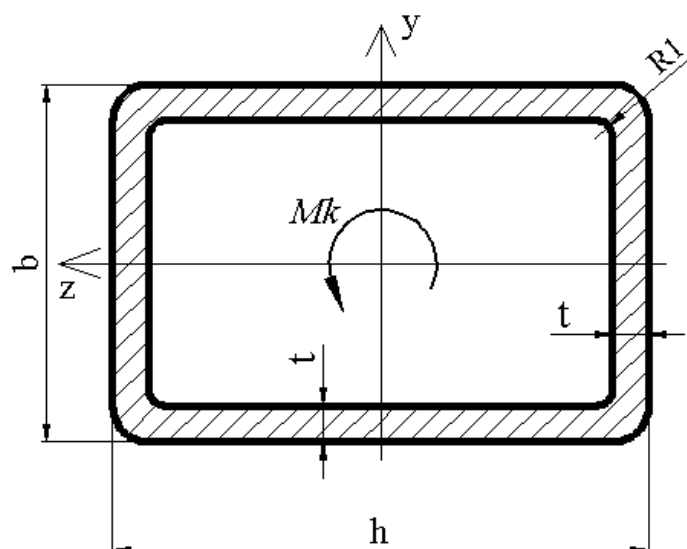
$$\tau_1 = \frac{Mk}{Wk_1} = \frac{Mk}{\delta \cdot b^2 \cdot h}$$

$$\tau_2 = \frac{Mk}{Wk_2} = \frac{Mk}{\lambda \cdot b \cdot h^2}$$

$$\vartheta = \frac{Mk}{G \cdot Jk} = \frac{Mk}{G \cdot \gamma \cdot b^3 \cdot h} \quad (3.1.11)$$

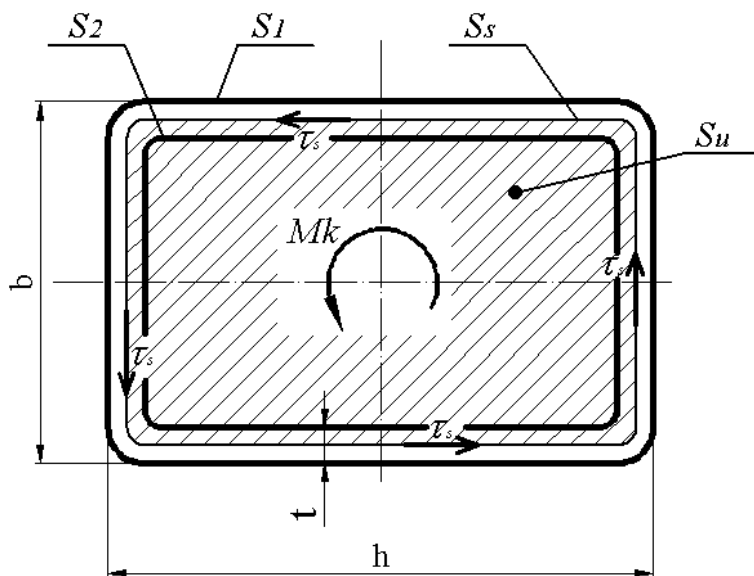
Součinitele δ , λ a γ lze nalézt pro některé poměry stran v odborné literatuře. Pro jiné poměry stran se musí stanovit pomocí interpolace.

3.2. Kroucení tenkostěnného obdélníkového profilu



Obr. 3.2.1

U kroucení tenkostěnného profilu využíváme toho, že smykové čáry S_1 (vnější obrys) a S_2 (vnitřní obrys) jsou velmi blízké (Obr. 3.2.2). Mezi těmito čarami je přenášén zatěžující kroucí moment. U střední smykové čáry S_s zanedbáme s malou nepřesností zaoblení v rozích. Plocha vytyčená střednicí je potom S_u .



Obr. 3.2.2

Kroucí moment spočteme potom jako:

$$Mk = \oint_{(C)} \tau_s \cdot \rho \cdot t \cdot ds = \tau_s \cdot t \cdot \oint_{(C)} \rho \cdot ds = 2 \cdot \tau_s \cdot t \cdot S_u \quad (3.2.1)$$

Z rovnice (3.2.1) pak spočteme napětí na střednici τ_s :

$$\tau_s = \frac{Mk}{2 \cdot t \cdot S_u} \quad (3.2.2)$$

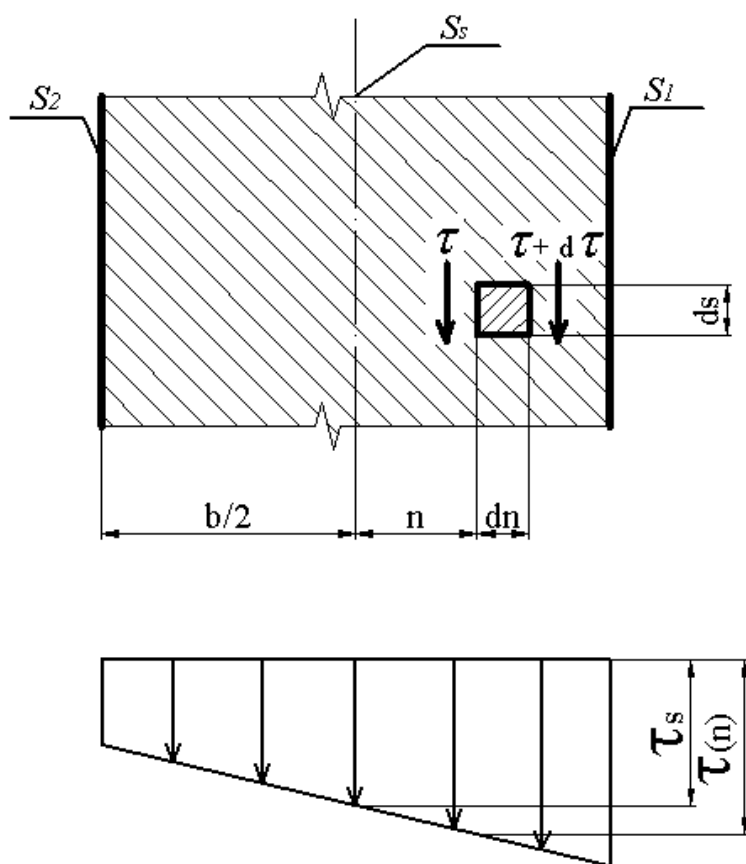
Využijeme-li Stokesovy poučky pro kroucení (1.7.6) a napíšeme ji pro střední smykovou čáru:

$$\tau_s \cdot O_U = 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot S_U \quad (3.2.3)$$

Kde za O_U dosadíme obvod dané uzavřené plochy $O_U = 2 \cdot [(b-t) + (h-t)]$ a za S_U její plochu $S_U = (b-t) \cdot (h-t)$.

Pak dostaneme rovnici pro poměrný úhel zkroucení:

$$\vartheta = \frac{\tau_s \cdot O_U}{2 \cdot G \cdot S_U} \quad (3.2.4)$$



Obr. 3.2.3

Rozložení napětí na přímé části je vidět na obrázku (Obr. 3.2.3) a vychází po interpolaci jako:

$$\tau = 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot t + C_1 \quad (3.2.5)$$

Z rovnice pro smykový tok určíme integrační konstantu C_1 .

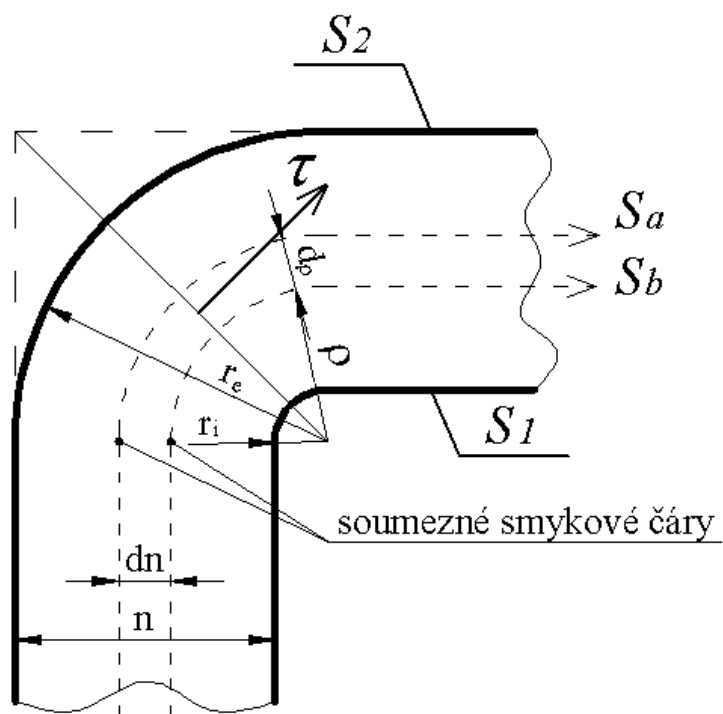
$$Q_\tau = \tau_s \cdot b = \int_{-t/2}^{t/2} \tau \cdot dn = \int_{-t/2}^{t/2} (2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot n + C_1) \cdot dn = \left[G \cdot \vartheta \cdot n^2 + C_1 \cdot n \right]_{-t/2}^{t/2} = C_1 \cdot t$$

$$C_1 = \tau_s \quad (3.2.6)$$

V přímé části pak vychází napětí jako:

$$\tau = \tau_s + 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot n \quad n \in \left\langle -\frac{t}{2}; \frac{t}{2} \right\rangle \quad (3.2.7)$$

Napětí na zakřivené části spočteme pomocí obrysových čar. Čáry jsou čtvrtkružnice se společným středem a představují smykové čáry S_1 a S_2 . (Obr. 3.2.4)



Obr. 3.2.4

Budeme-li předpokládat další soumězné smykové čáry se stejným středem S_a a S_b a použijeme Stokesovu větu (1.7.6) pro zakřivený element dostaneme obecné řešení ve tvaru:

$$\tau_{(\rho)} = \frac{C_2}{d\rho} + G \cdot \vartheta \cdot \rho \quad \rho \in \langle R_1; R_2 \rangle \quad (3.2.8)$$

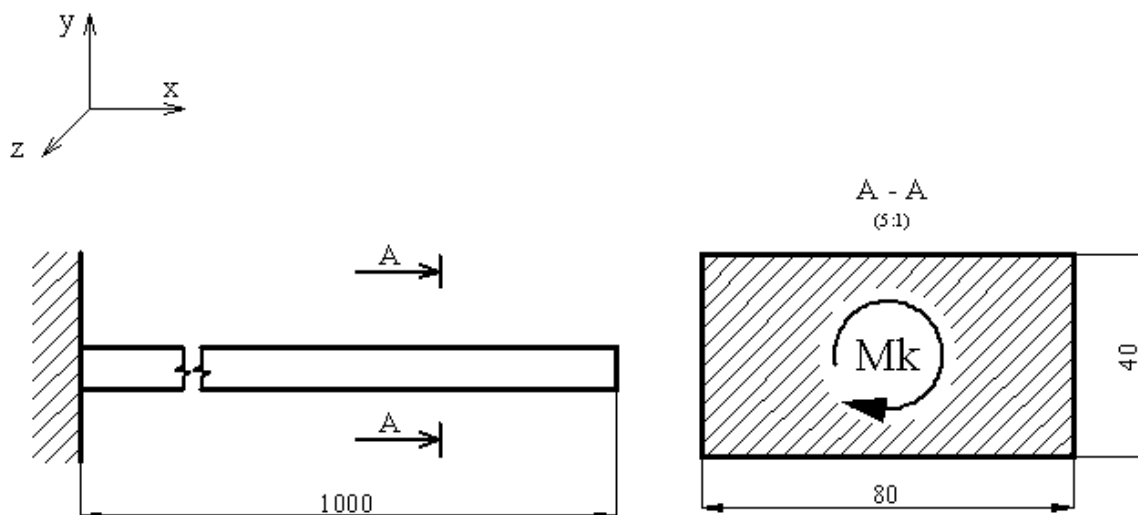
Ze smykového toku opět určíme integrační konstantu C_2 . Smykový tok má shodnou velikost jak pro přímou tak i pro zakřivenou část profilu.

$$C_2 = \frac{\tau_s \cdot t - \frac{G \cdot \vartheta}{2} \cdot [(R_1 + b)^2 - R_1^2]}{\ln\left(\frac{R_1 + t}{R_1}\right)} \quad (3.2.9)$$

4. Řešení plného obdélníkového profilu

4.1. Rozměry profilu a okrajové podmínky

Tyč obdélníkového profilu 80×40 délky $L = 1\text{ m}$ zatížíme na jednom konci kroutícím momentem $M_k = 36788\text{ Nmm}$ a druhý konec vetkneme (Obr. 4.1.1).



Obr. 4.1.1

4.2. Analytické řešení

Při řešení plného obdélníkového průřezu víme, že smykové čáry jsou rovnoběžné s osou z s výjimkou konců delších stran. Pro analytické řešení využijeme z teorie odvozených vzorců (3.1.10) a (3.1.11). Kde za součinitele δ , λ a γ dosadíme hodnoty nalezené v odborné literatuře [1]. Z daných vzorců spočteme maximální složky napětí v jednotlivých směrech. Tato napětí se nacházejí uprostřed odpovídajících stran – místo 1 a 2. (Obr. 4.2.1).

$$M_k = 36788\text{ Nmm} \quad E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa} \quad G = 8,1 \cdot 10^4\text{ MPa}$$

$$b = 40\text{ mm} \quad h = 80\text{ mm} \quad L = 1000\text{ mm}$$

$$\delta = 0,246 \quad \lambda = 0,155 \quad \gamma = 0,2287$$

Složky napětí

$$\tau_{xy} = \frac{Mk}{Wk} = \frac{Mk}{\delta \cdot b^2 \cdot h} = \frac{36788}{0,246 \cdot 40^2 \cdot 80} = \underline{1,168 MPa}$$

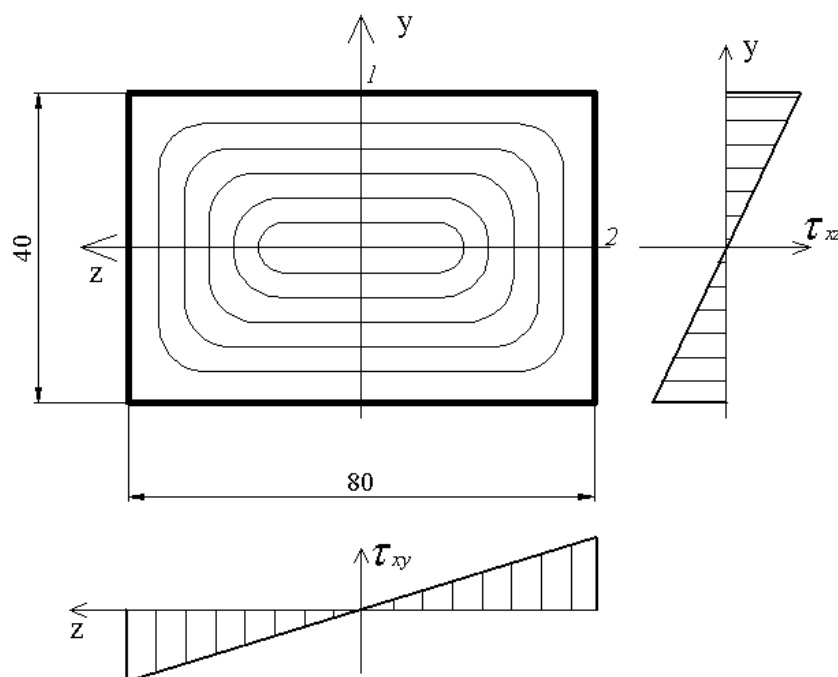
$$\tau_{xz} = \frac{Mk}{Wk} = \frac{Mk}{\lambda \cdot b \cdot h^2} = \frac{36788}{0,155 \cdot 40 \cdot 80^2} = \underline{0,927 MPa}$$

Poměrný úhel zkroucení

$$\vartheta = \frac{Mk}{G \cdot \gamma \cdot b^3 \cdot h} = \frac{36788}{8,1 \cdot 10^4 \cdot 0,2287 \cdot 40^3 \cdot 80} = \underline{3,879 \cdot 10^{-7} \frac{1}{mm}}$$

Natočení volného konce

$$\Phi = \vartheta \cdot L = 3,879 \cdot 10^{-7} \cdot 1000 = \underline{3,879 \cdot 10^{-4} rad = 0,022^\circ}$$



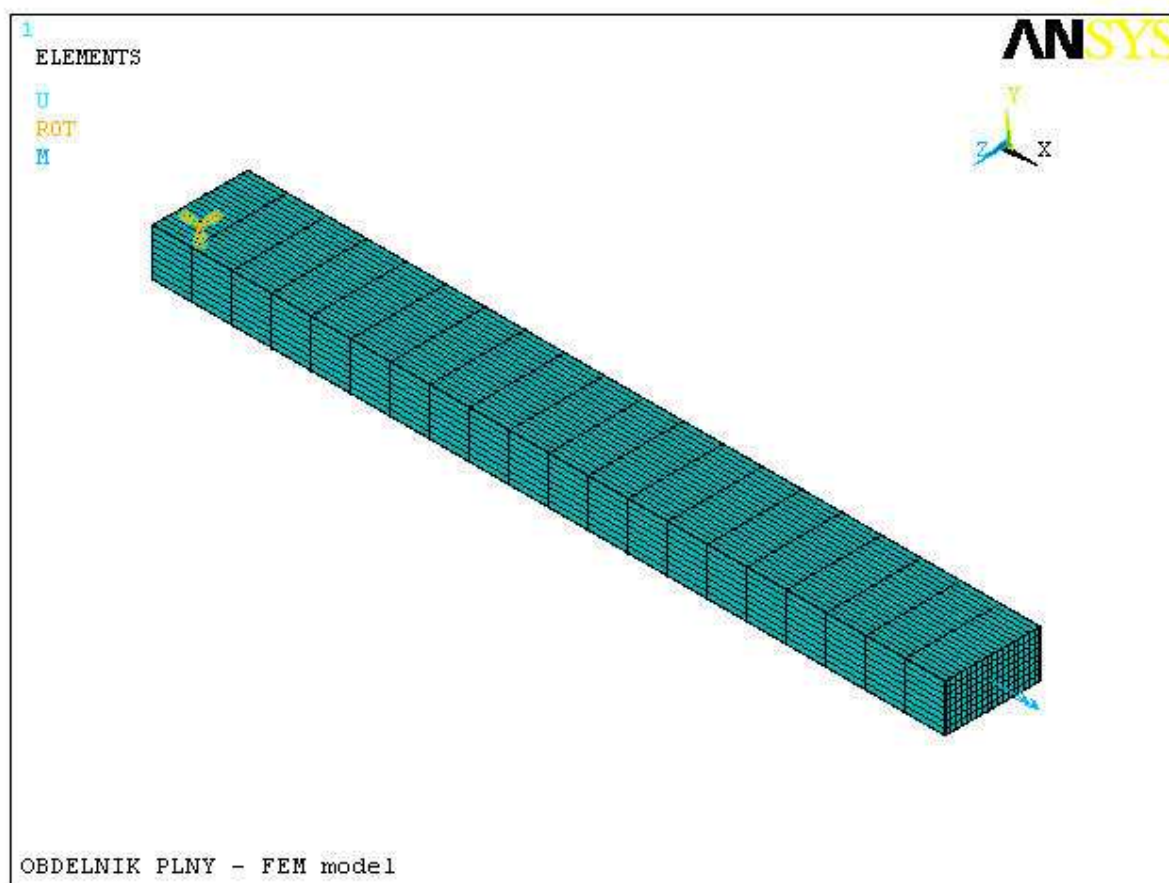
Obr. 4.2.1

4.3. Numerické řešení pomocí programu Ansys

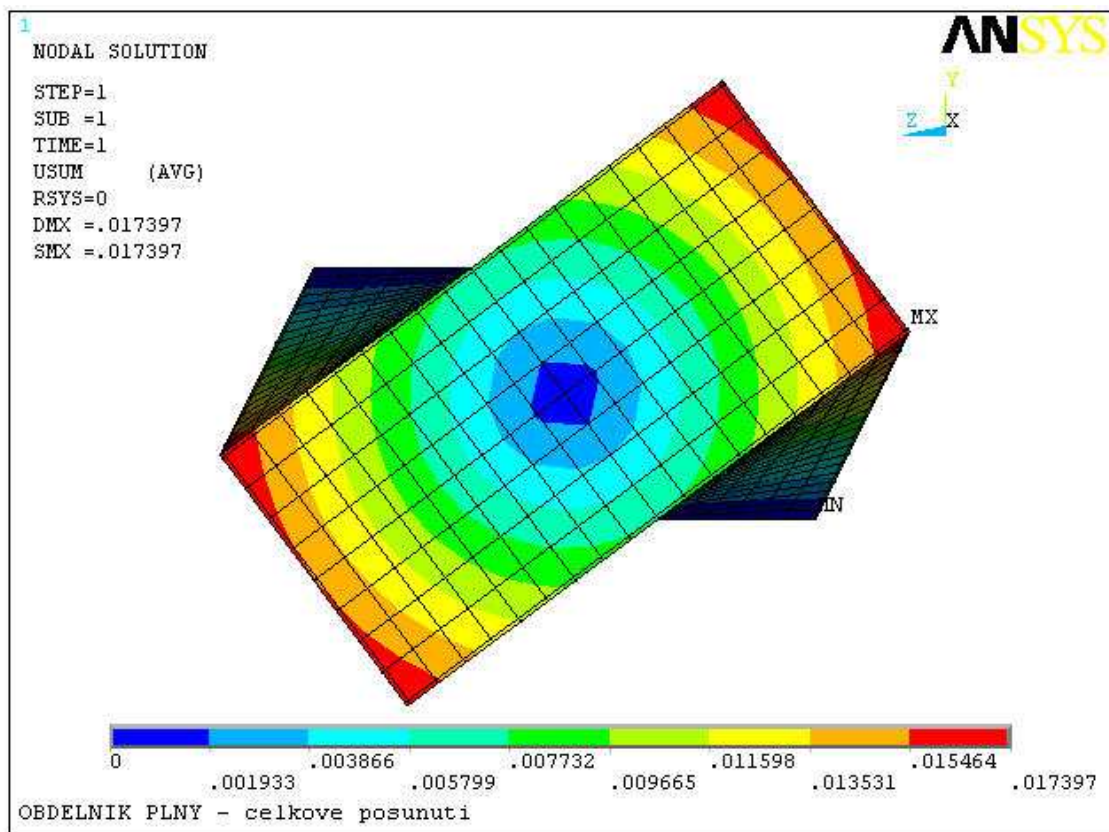
Pro řešení použijeme přednastavený cross-section obdélníkového průřezu, do kterého zadáme naše rozměry. Dále použijeme prvek BEAM 188. Použijeme jeho dvou uzlovou variantu, kde každý uzel má 6 stupňů volnosti (UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ). Jako interpolační schéma volíme kvadratický tvar funkce.

Použitý element	BEAM 188
Počet elementů	20
Velikost hrany elementu	50 mm
Počet uzlů	21

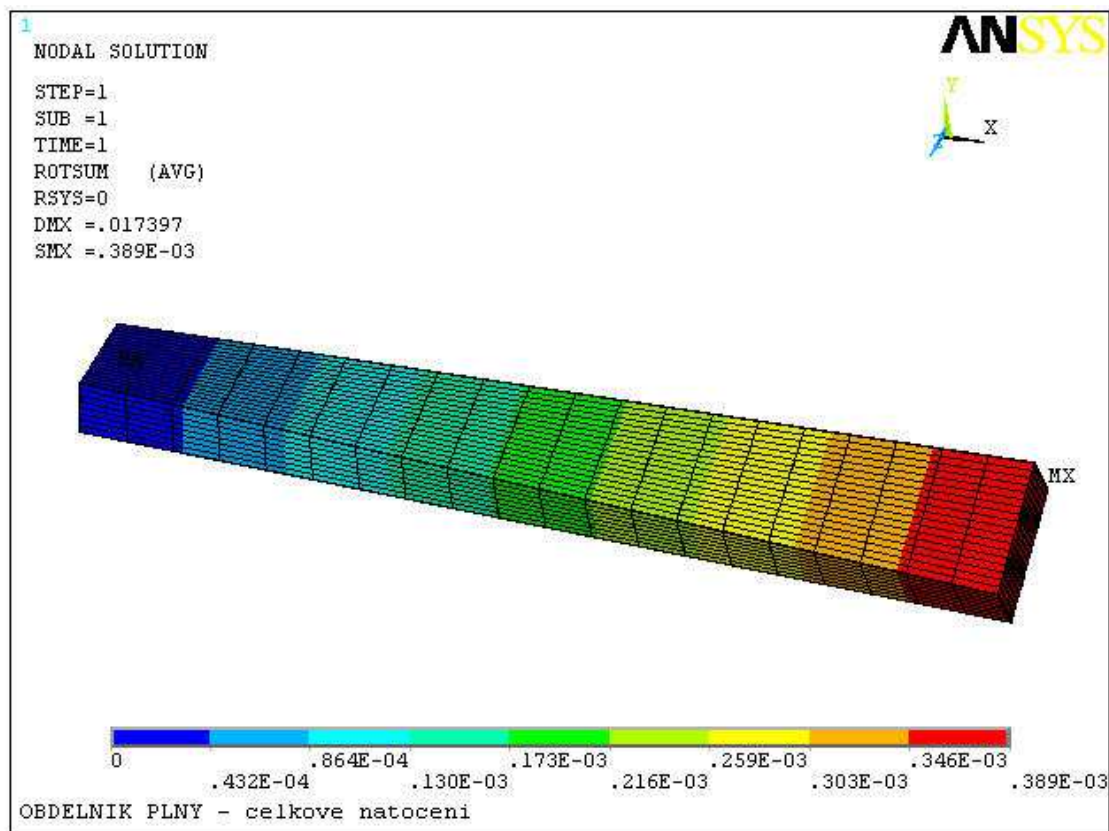
Tab. 4.3.1



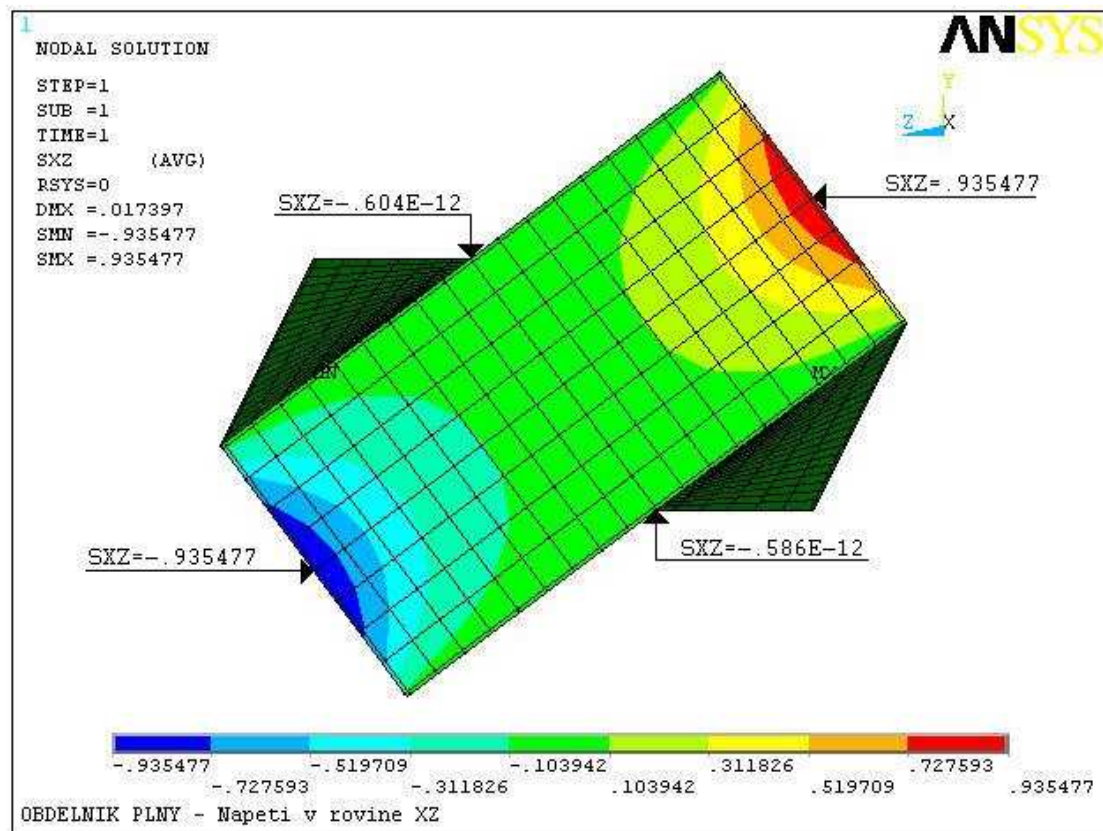
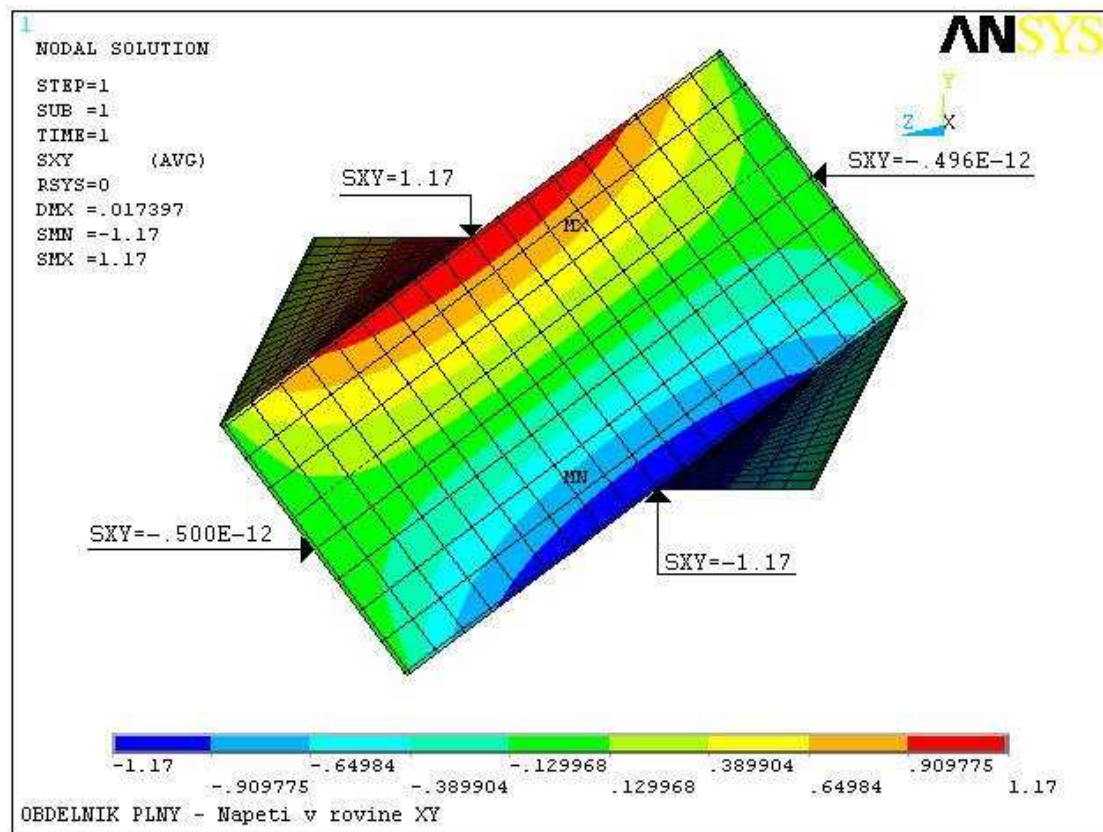
Obr. 4.3.1

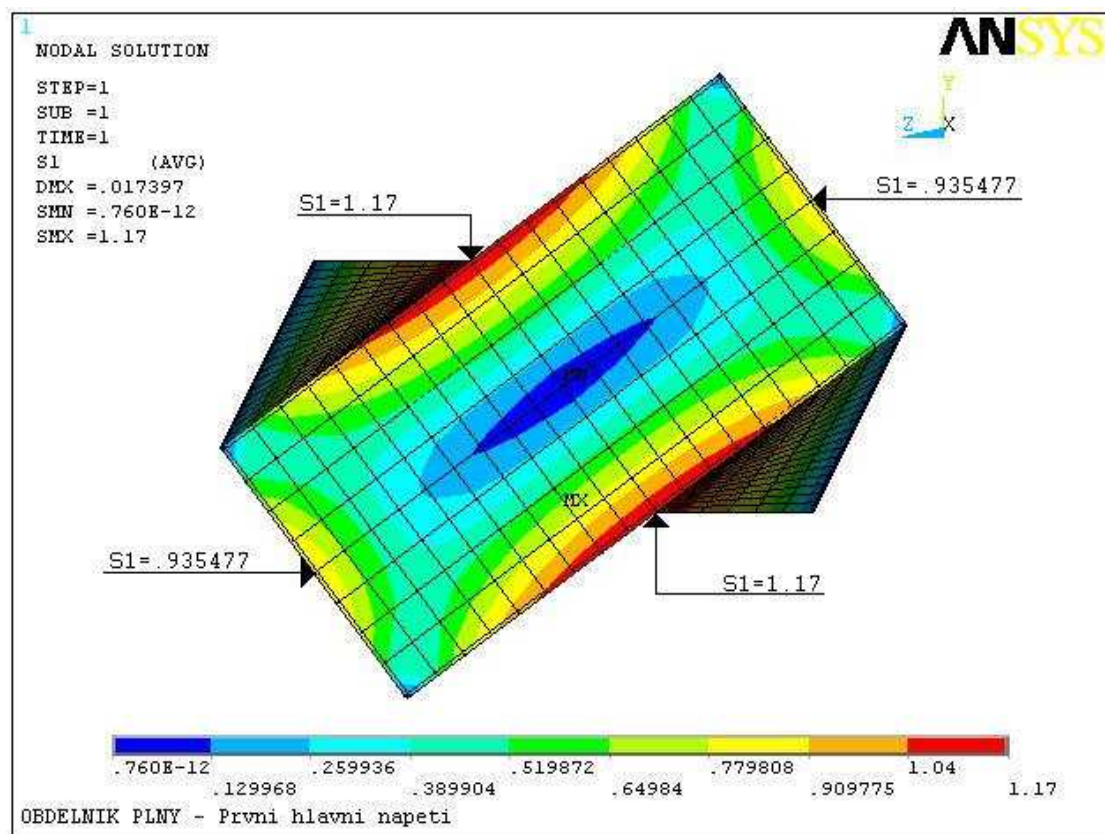


Obr.4.3.2

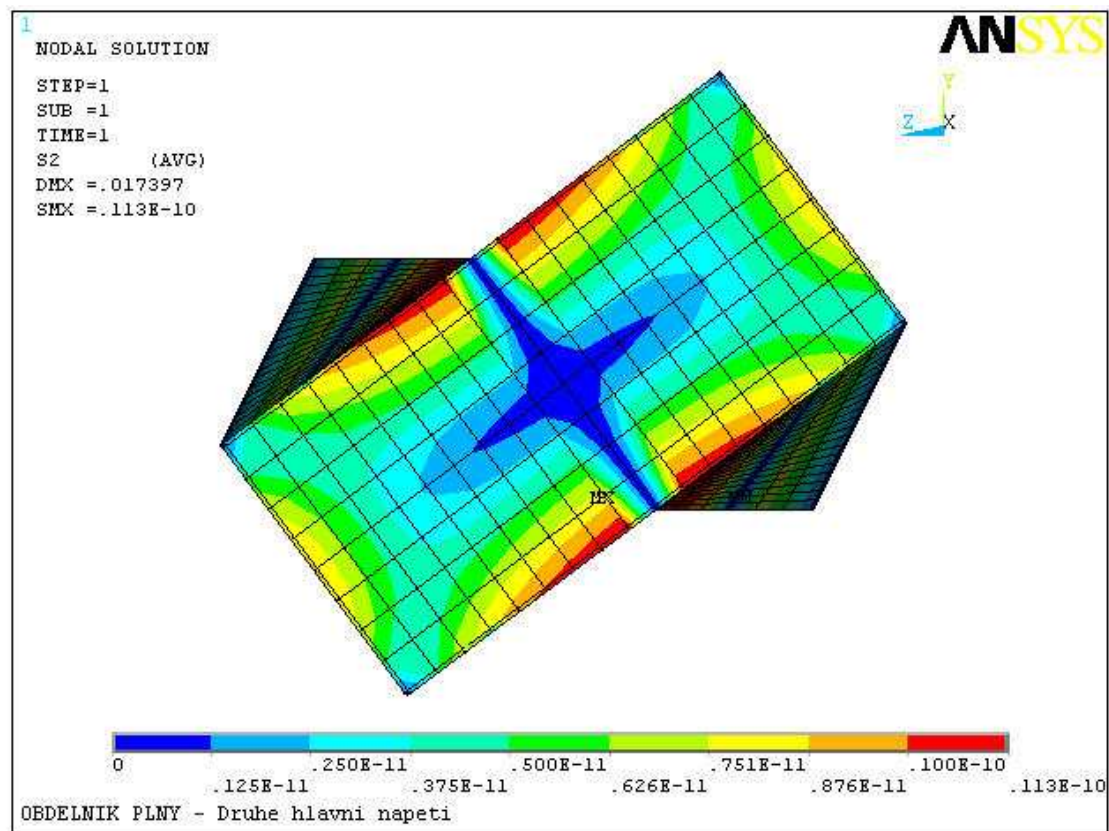


Obr.4.3.3

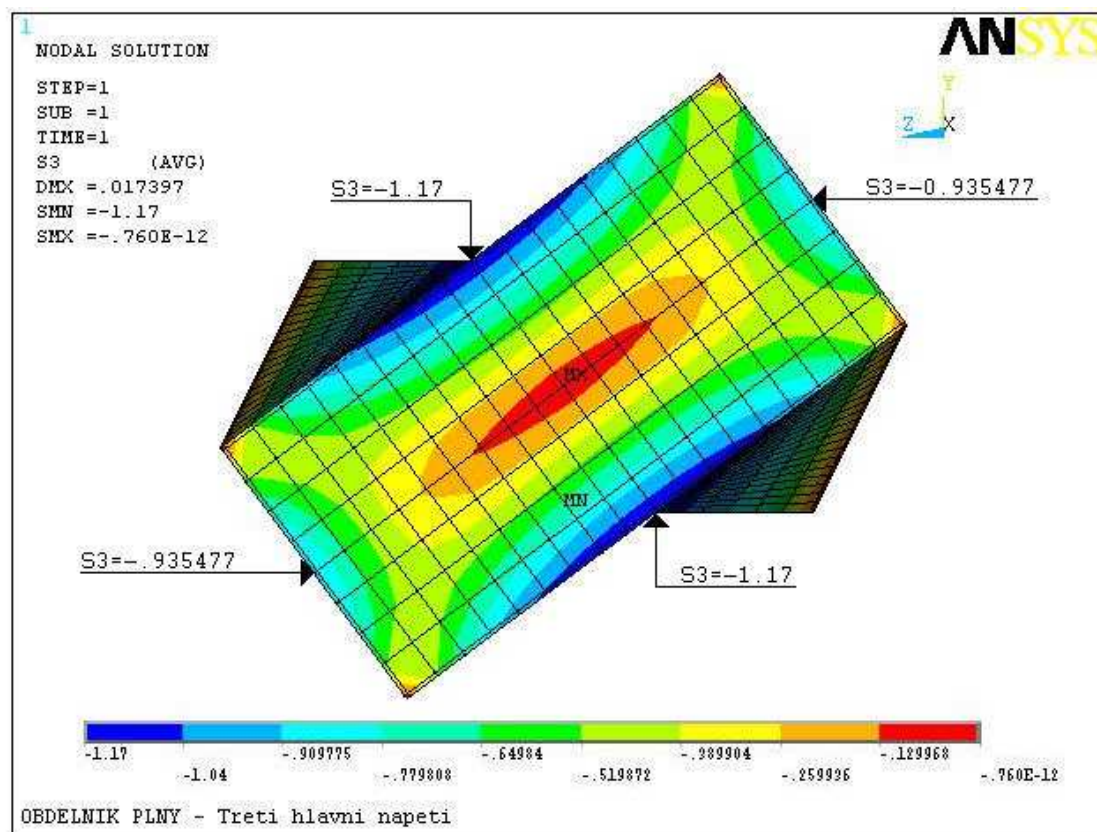




Obr. 4.3.6



Obr. 4.3.7



Obr. 4.3.8

4.4. Porovnání analytického a numerického řešení

	Analytické řešení	Numerické řešení	Rozdíl = $\left \frac{A\check{R} - N\check{R}}{A\check{R}} \right \cdot 100$ [%]
Úhel natočení [rad]	$3,879 \times 10^{-4}$	$3,890 \times 10^{-4}$	0,284
Napětí τ_{xy} [MPa]	1,168	1,170	0.171
Napětí τ_{xz} [MPa]	0,927	0,935	0.863

Tab.4.4

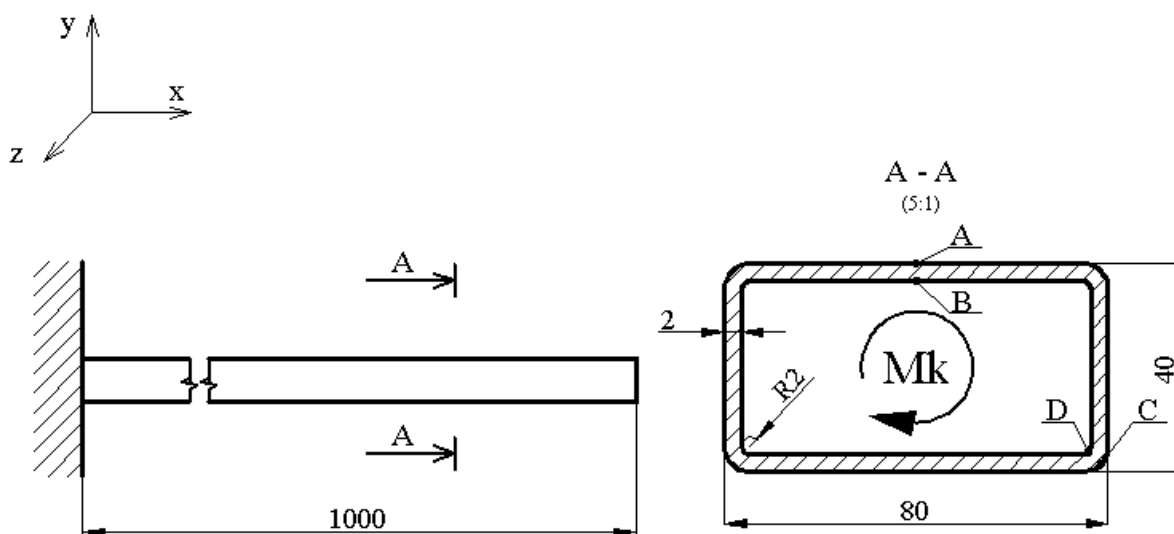
Z tabulky 4.4 je vidět, že pro plný obdélníkový průřez při použití prvku BEAM 188 je maximální rozdíl mezi analytickým a numerickým řešením 0,863 %. Tento rozdíl je velmi malý a je tudíž proto zanedbatelný.

5. Řešení tenkostěnného obdélníkového profilu

5.1. Rozměry profilu a okrajové podmínky

Tyč tenkostěnného obdélníkového průřezu $80 \times 40 \times 2$, délky $L = 1\text{ m}$ zatížíme na jednom konci kroutícím momentem $M_k = 36788\text{ Nmm}$ a druhý konec je vetknut (viz. Obr. 5.1.1).

Pro experimentální měření jsou tenzometry umístěné v místě A, tedy na vnějším obrysu delší strany a to ve vzdálenosti 750 mm .



Obr. 5.1.1

5.2. Analytické řešení

Při řešení tenkostěnného obdélníkového průřezu vidíme, že vnější obrys je velmi blízko vnitřnímu obrysu a proto můžeme s malou nepřesností zanedbat zaoblení v rozích střednice. Pro analytické řešení použijeme z teorie rovnice (3.2.2, 3.2.4, 3.2.7, 3.2.8 a 3.2.9).

$$M_k = 36788\text{ Nmm} \quad E = 2,1 \cdot 10^5\text{ MPa} \quad G = 8,1 \cdot 10^4\text{ MPa}$$

$$b = 40\text{ mm} \quad h = 80\text{ mm} \quad t = 2\text{ mm} \quad R_1 = 2\text{ mm} \quad R_2 = 4\text{ mm} \quad L = 1000\text{ mm}$$

Obvod střednice a obsah plochy uzavřené střednicí

$$O_U = 2 \cdot [(b - t) + (h - t)] = 2 \cdot [(40 - 2) + (80 - 2)] = \underline{232mm}$$

$$S_U = (b - t) \cdot (h - t) = (40 - 2) \cdot (80 - 2) = \underline{2964mm^2}$$

Napětí na střednici

$$\tau_s = \frac{Mk}{2 \cdot S_U \cdot t} = \frac{36788}{2 \cdot 2964 \cdot 2} = \underline{3,103MPa}$$

Napětí na rovné části

$$\tau = \tau_s + 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot n \quad n \in \left\langle -\frac{t}{2}; \frac{t}{2} \right\rangle$$

- vnitřní strana (místo B)

$$n = -\frac{t}{2}$$

$$\tau_B = \tau_s + 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) = 3,103 + 2 \cdot 8,1 \cdot 10^4 \cdot 1,499 \cdot 10^{-6} \cdot \left(-\frac{2}{2}\right) = \underline{2,860MPa}$$

- vnější strana (místo A)

$$n = \frac{t}{2}$$

$$\tau_A = \tau_s + 2 \cdot G \cdot \vartheta \cdot \frac{t}{2} = 3,103 + 2 \cdot 8,1 \cdot 10^4 \cdot 1,499 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2}{2} = \underline{3,346MPa}$$

Poměrný úhel zkroucení

$$\vartheta = \frac{O_U \cdot \tau_s}{2 \cdot G \cdot S_U} = \frac{232 \cdot 3,103}{2 \cdot 8,1 \cdot 10^4 \cdot 2964} = 1,499 \cdot 10^{-6} \frac{1}{mm}$$

Natočení volného konce

$$\Phi = \vartheta \cdot l = 1,499 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 = \underline{1,499 \cdot 10^{-3} rad = 0,086^\circ}$$

Napětí v rozích profilu

$$\tau_{(\rho)} = \frac{C2}{d\rho} + G \cdot \vartheta \cdot \rho \quad \rho \in \langle R1; R2 \rangle$$

$$C2 = \frac{\tau_s \cdot t - \frac{G \cdot \vartheta}{2} \cdot \left[(R1 + t)^2 - R1^2 \right]}{\ln\left(\frac{R1 + t}{R1}\right)} = \frac{3,103 \cdot 2 - \frac{8,1 \cdot 10^4 \cdot 1,499 \cdot 10^{-6}}{2} \cdot \left[(2 + 2)^2 - 2^2 \right]}{\ln\left(\frac{2 + 2}{2}\right)}$$

$$C2 = \underline{7,902mm}$$

- vnitřní poloměr (místo D)

$$\rho = R1$$

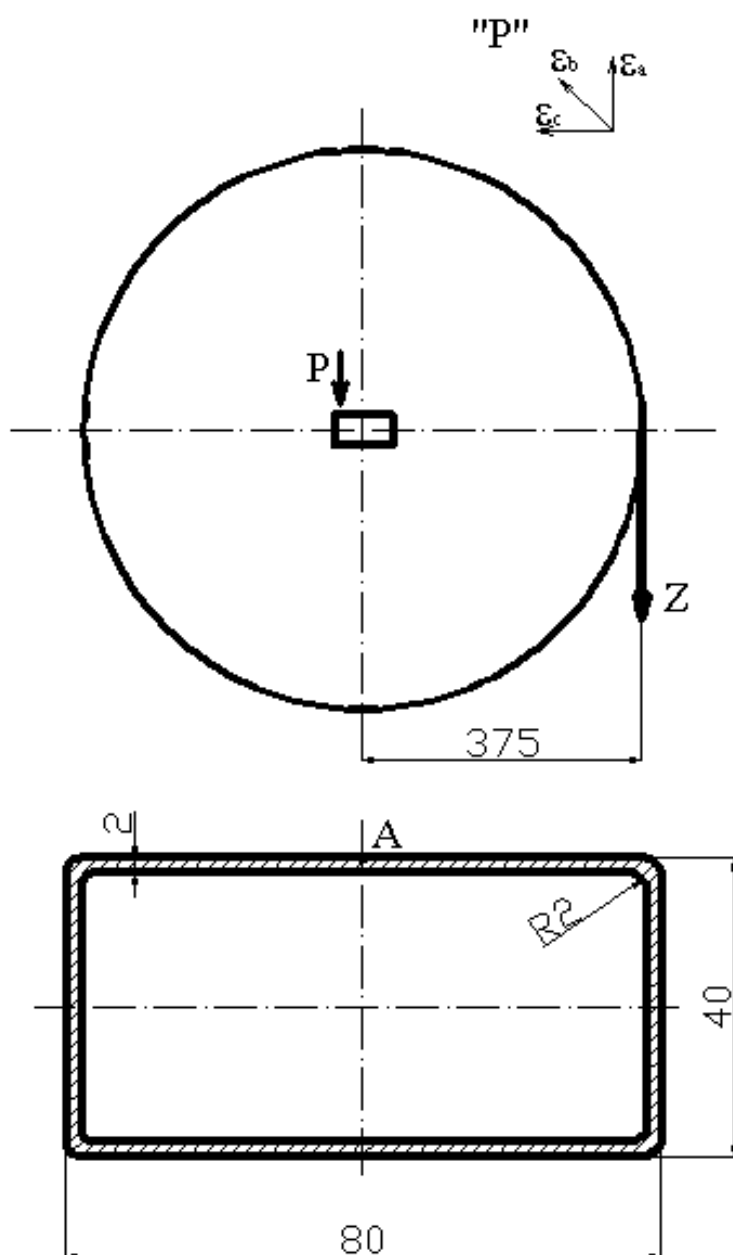
$$\tau_D = \frac{C2}{R1} + G \cdot \vartheta \cdot R1 = \frac{7,902}{2} + 8,1 \cdot 10^4 \cdot 1,499 \cdot 10^{-6} \cdot 2 = \underline{4,194MPa}$$

- vnější poloměr (místo C)

$$\rho = R2$$

$$\tau_C = \frac{C2}{R2} + G \cdot \vartheta \cdot R2 = \frac{7,902}{4} + 8,1 \cdot 10^4 \cdot 1,499 \cdot 10^{-6} \cdot 4 = \underline{2,461MPa}$$

5.3. Experimentální měření pomocí tenzometru v místě A



Obr. 5.3.1

Parametry zatížení a naměřené hodnoty

Z [kg]	K [N.mm ⁻¹]	Mk [N.mm]	E [MPa]	μ [-]	U _a [V]	U _b [V]	U _c [V]
10	2	36788	2,1.10 ⁵	0,3	0	11	0

Tab. 5.3.1

Přepočet naměřeného napětí na poměrné deformace

$$\varepsilon = \frac{4 \cdot C_z \cdot U_i}{n \cdot K \cdot A}$$

- C_z je citlivost zesilovače $C_z = 0,1 \frac{mV}{V}$
- U_i je naměřená hodnota
- n je počet aktivních tenzometrů ($n = 1$ – čtvrt most)
- K je deformační součinitel tenzometru $K = 2 \frac{N}{mm}$
- A je výstupní napětí při kalibraci $A = 100V$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_c = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 0}{1 \cdot 2 \cdot 100} = \underline{0 \mu S}$$

$$\varepsilon_b = \frac{4 \cdot 0,1 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 100} = \underline{0,022 \mu S}$$

Výpočet smykového napětí v místě A

$$\tau = \tau_b = \frac{E \cdot \varepsilon_b}{1 + \mu} = \frac{2,1 \cdot 10^5 \cdot 0,022 \cdot 10^{-3}}{1 + 0,3} = \underline{3,554 MPa}$$

Výsledné hodnoty měření

Poměrná deformace ε_b v místě A	μS	0,022
Smykové napětí τ v místě A	MPa	3,554

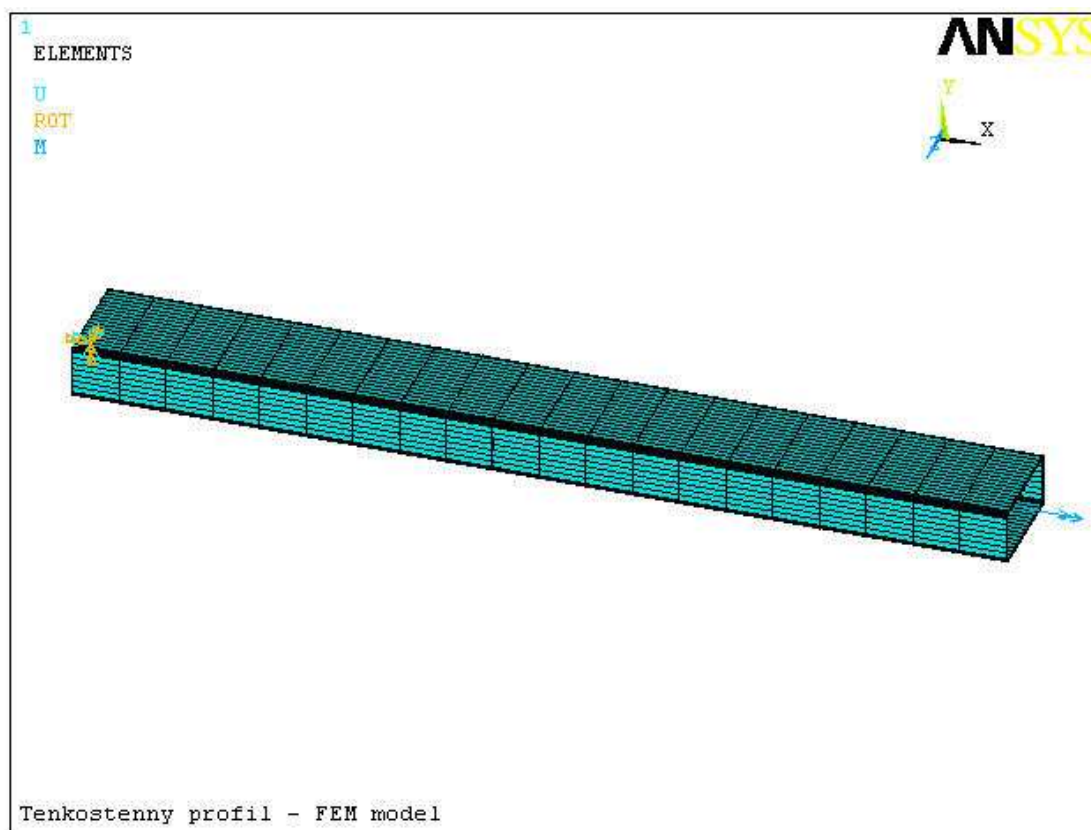
Tab. 5.3.2

5.4. Numerické řešení pomocí programu Ansys

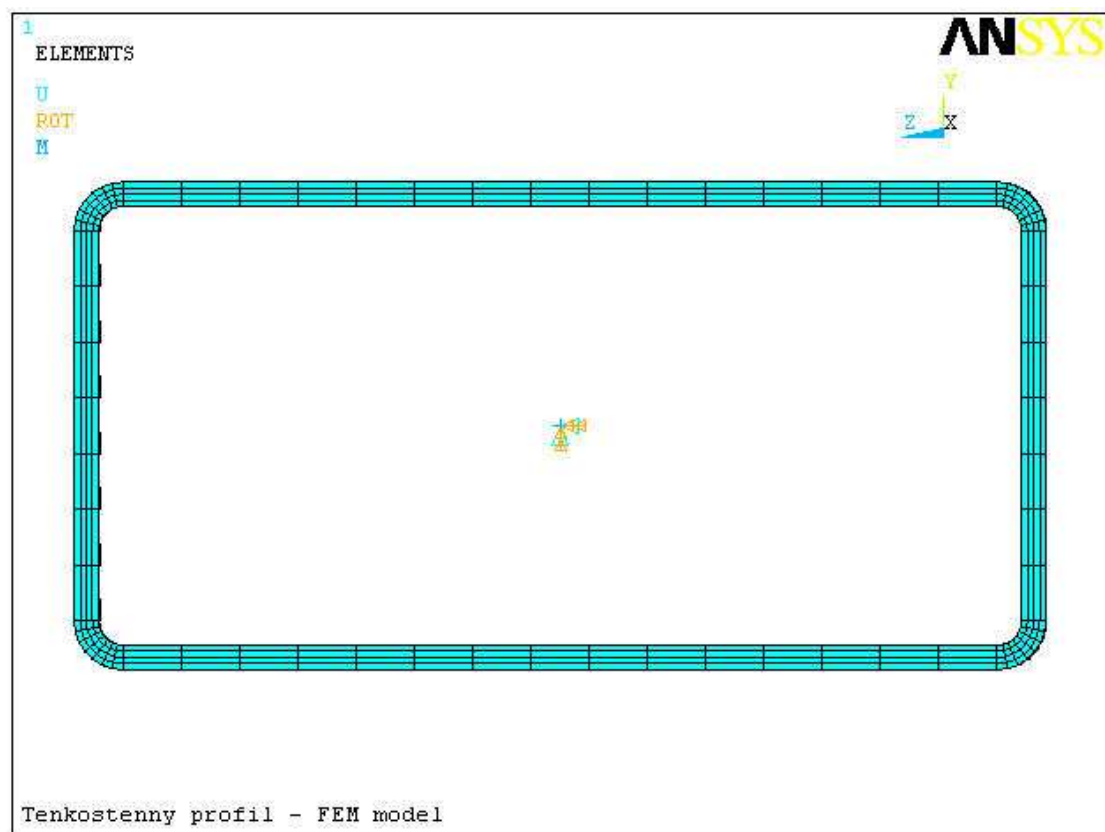
Pro řešení použijeme vlastní cross-section tenkostěnného obdélníkového průřezu se zaoblenými hranami. Dále použijeme prvek BEAM 188. Použijeme jeho dvou uzlovou variantu, kde každý uzel má 6 stupňů volnosti (UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ). Jako interpolační schéma volíme kvadratický tvar funkce.

Použitý element	BEAM 188
Počet elementů	20
Velikost hrany elementu	50 mm
Počet uzlů	21

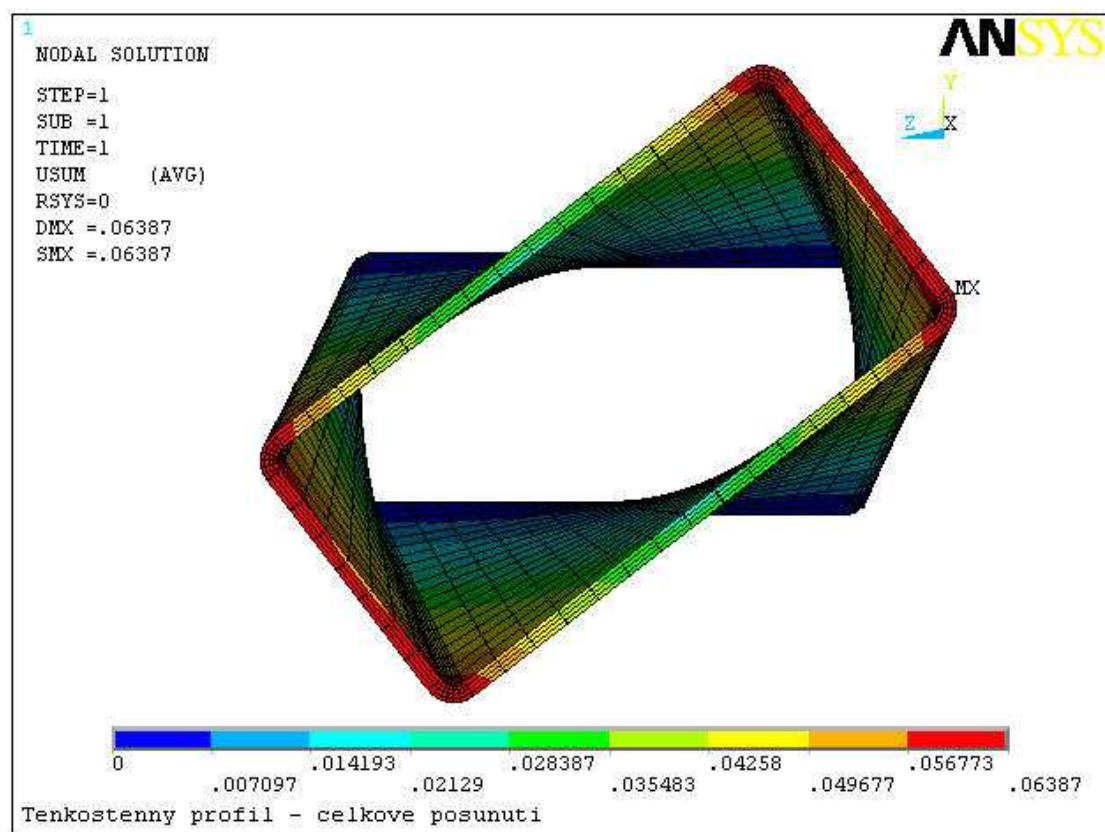
Tab. 5.4.1



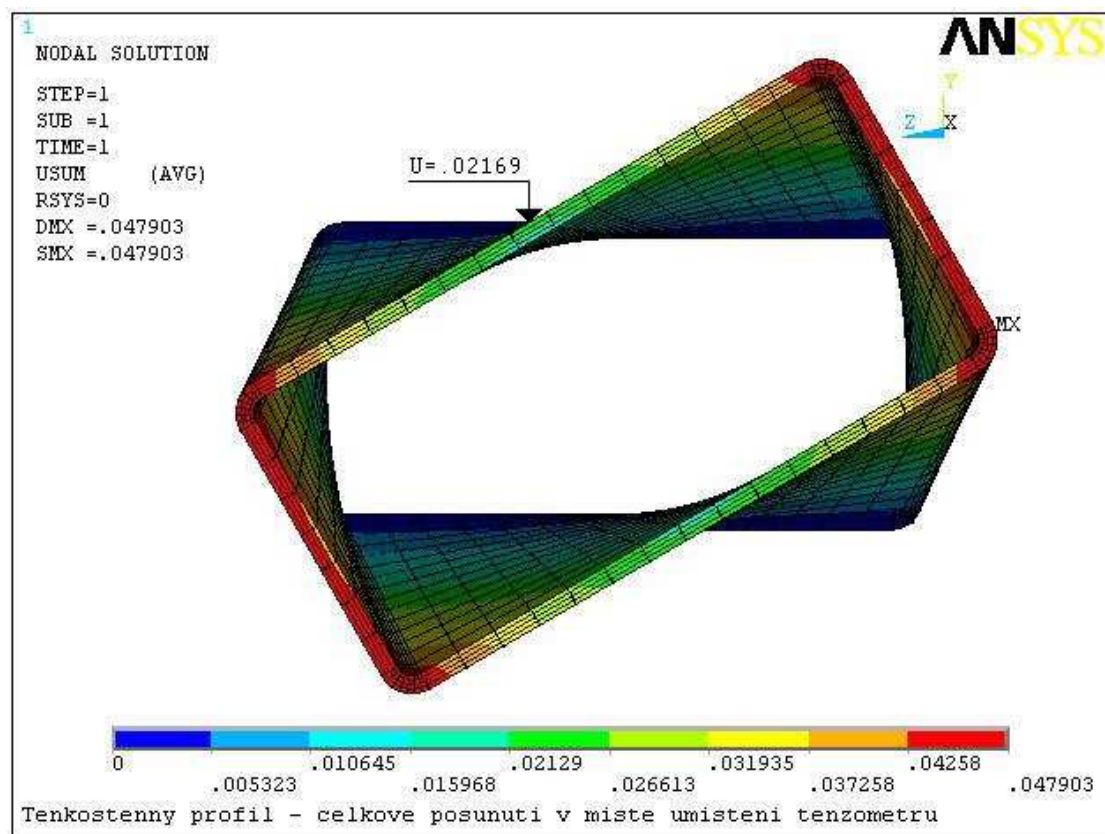
Obr. 5.4.1



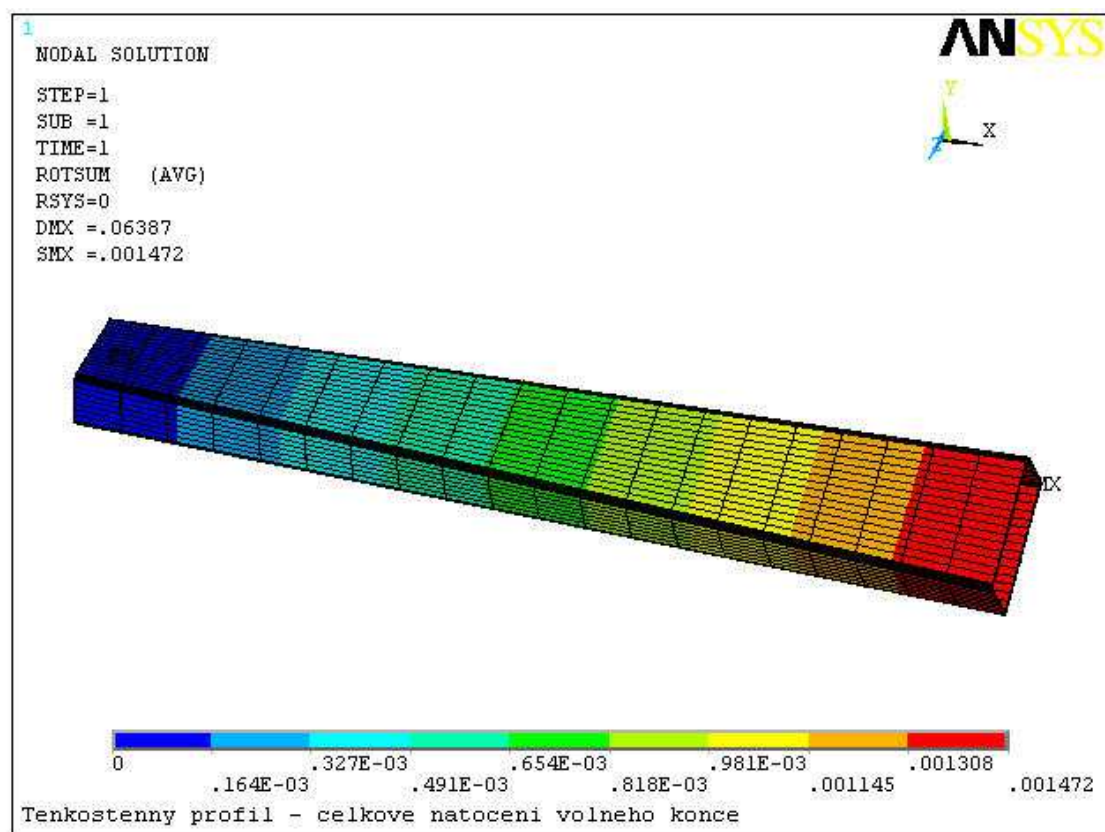
Obr. 5.4.2



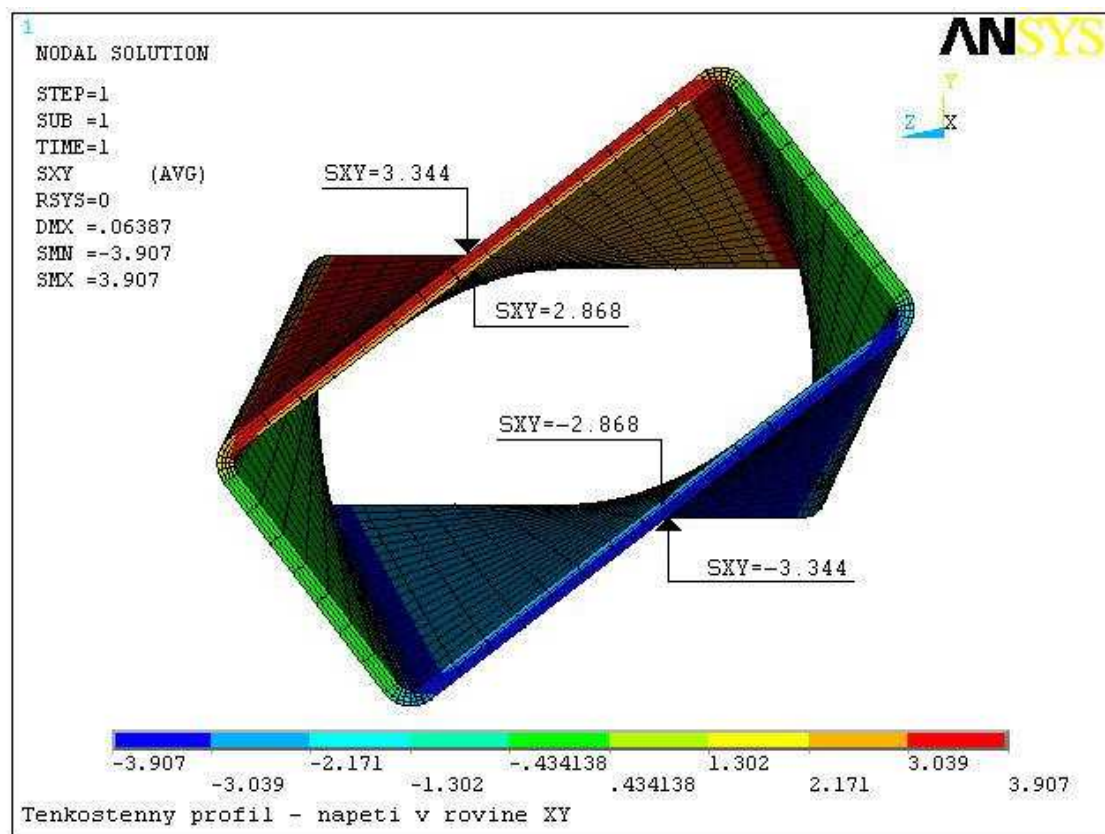
Obr. 5.4.3



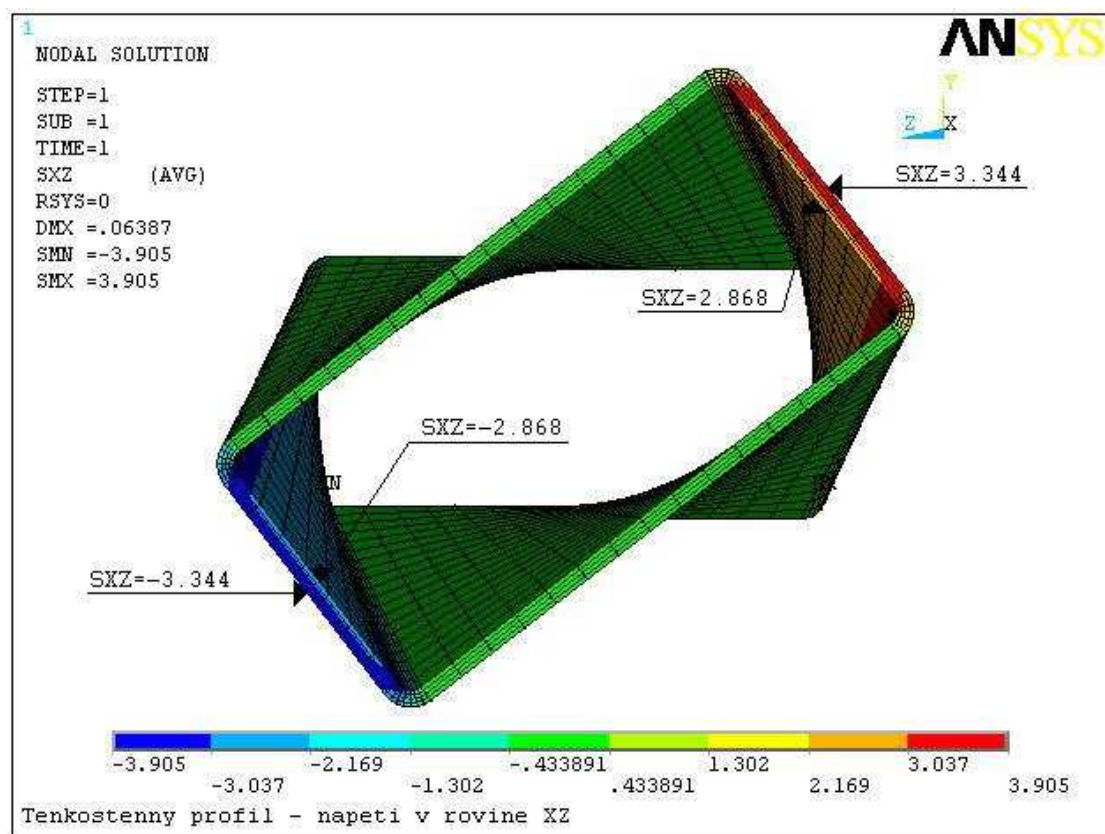
Obr. 5.4.4



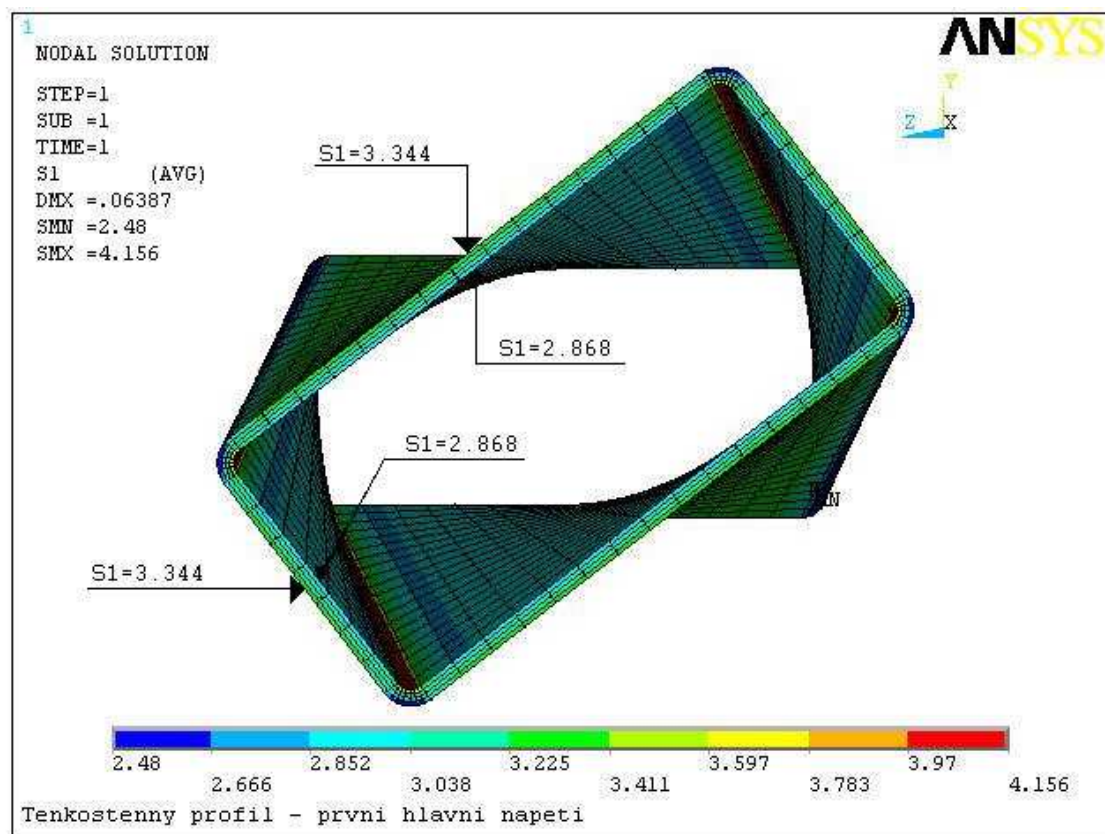
Obr. 5.4.5



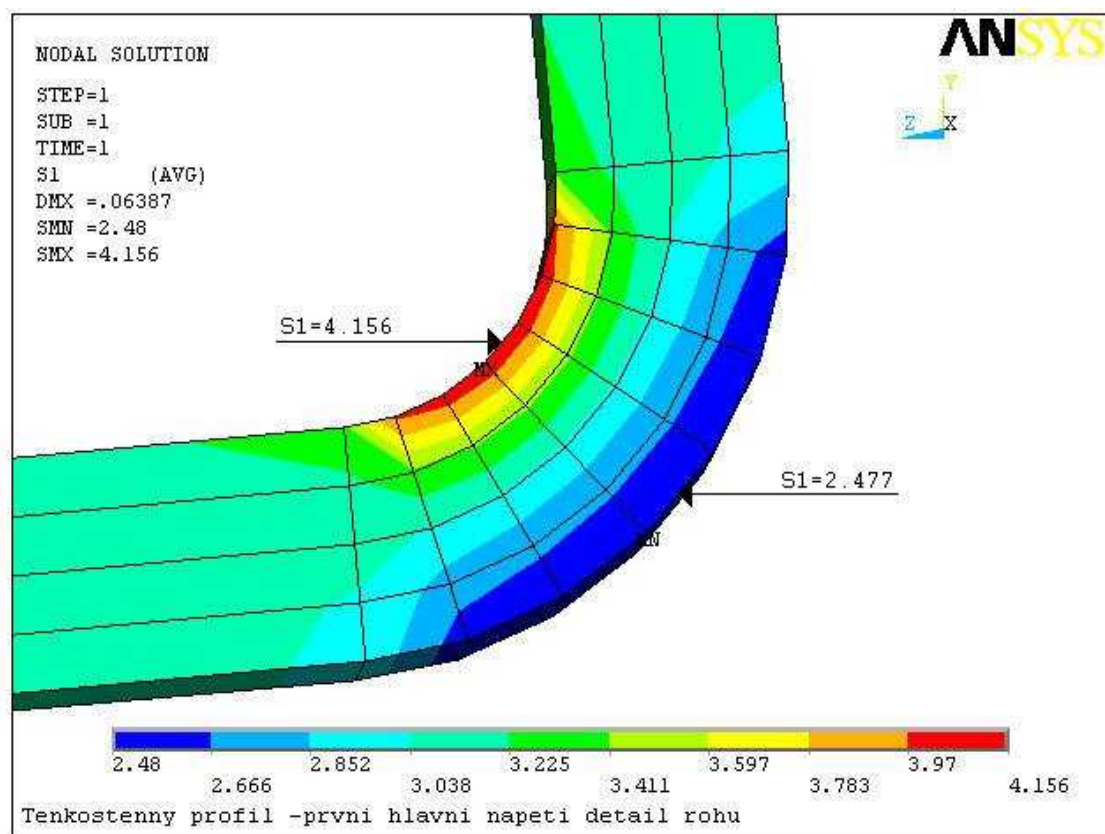
Obr. 5.4.6



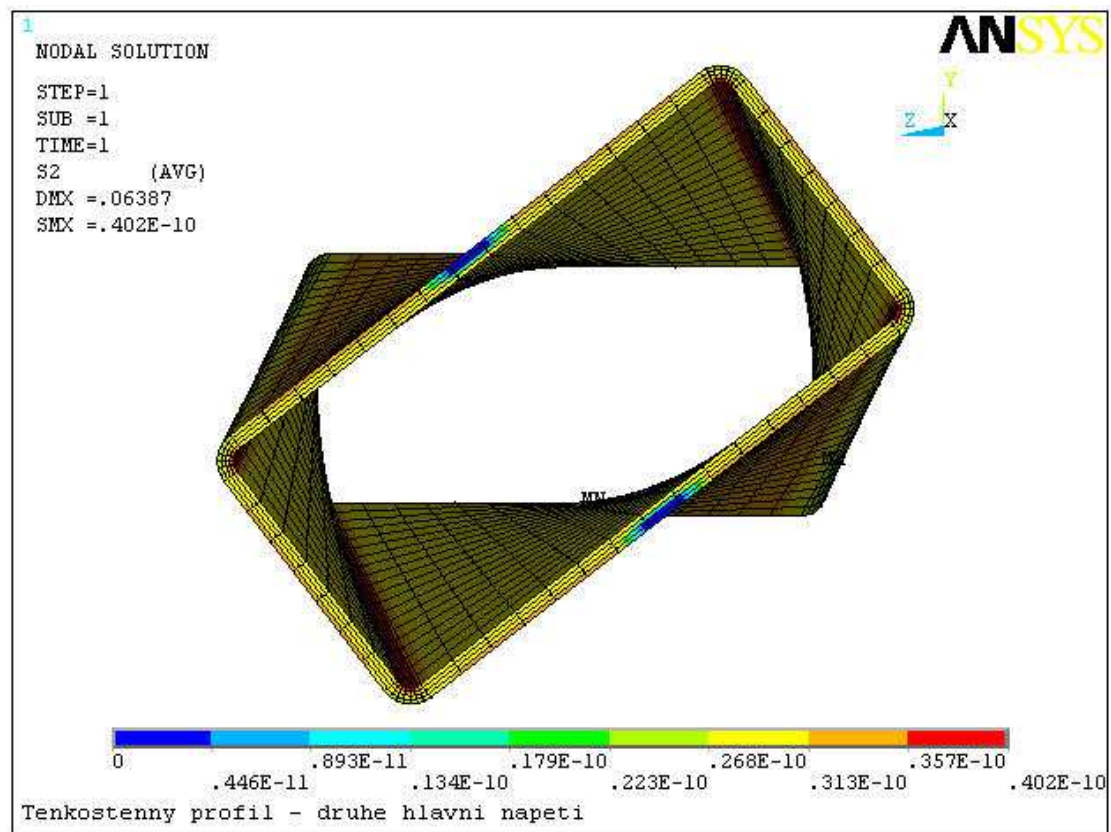
Obr. 5.4.7



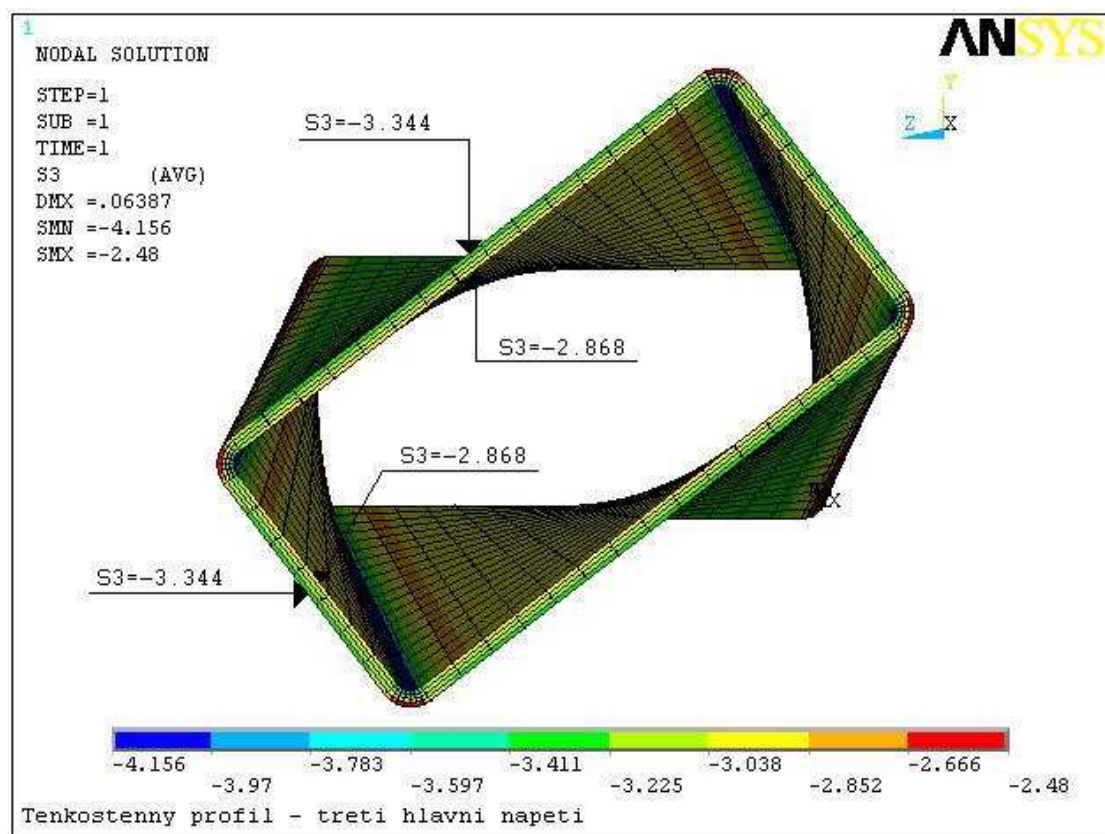
Obr. 5.4.8



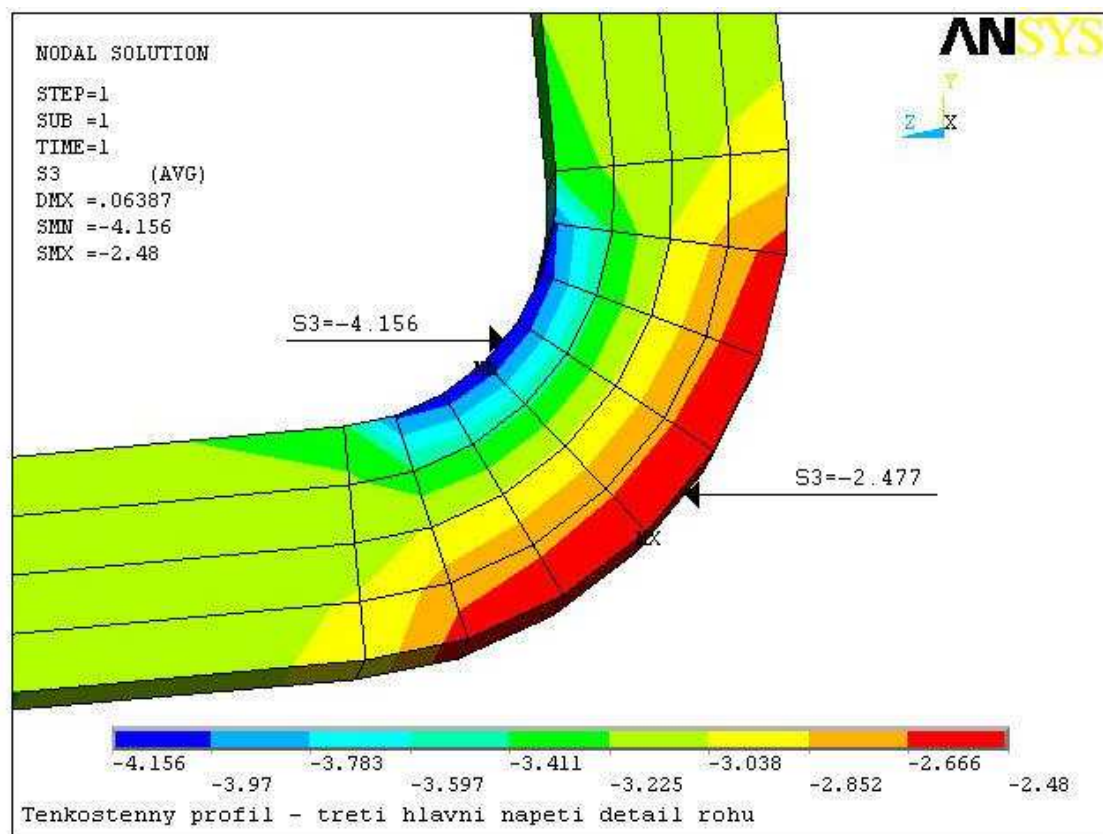
Obr. 5.4.9



Obr. 5.4.10



Obr. 5.4.11



Obr. 5.4.12

5.5. Porovnání analytického řešení s numerickým a s experimentem

	Analytické řešení	Numerické řešení	Rozdíl = $\left \frac{A\check{R} - N\check{R}}{A\check{R}} \right \cdot 100$ [%]
Úhel natočení [rad]	$1,499 \cdot 10^{-3}$	$1,472 \cdot 10^{-3}$	1,801
Hl.napětí τ v místě A [MPa]	3,346	3,344	0,060
Hl.napětí τ v místě B [MPa]	2,860	2,868	0,280
Hl.napětí τ v místě C [MPa]	2,461	2,477	0,650
Hl.napětí τ v místě D [MPa]	4,194	4,156	0,906

Tab. 5.5.1

	Experiment	Numerické řešení	Rozdíl = $\left \frac{A\check{R} - N\check{R}}{A\check{R}} \right \cdot 100$ [%]
Deformace v místě A [mm]	0,022	0,02169	1,409
Hl.napětí τ v místě A [MPa]	3,554	3,344	5.909

Tab. 5.5.2

Z porovnání hodnot v tabulce 5.5.1 je vidět, že prvek BEAM 188 dává při použití vlastního cross-sectionu výsledky jen s velmi malými odchylkami. Tyto odchylky lze tedy zanedbat.

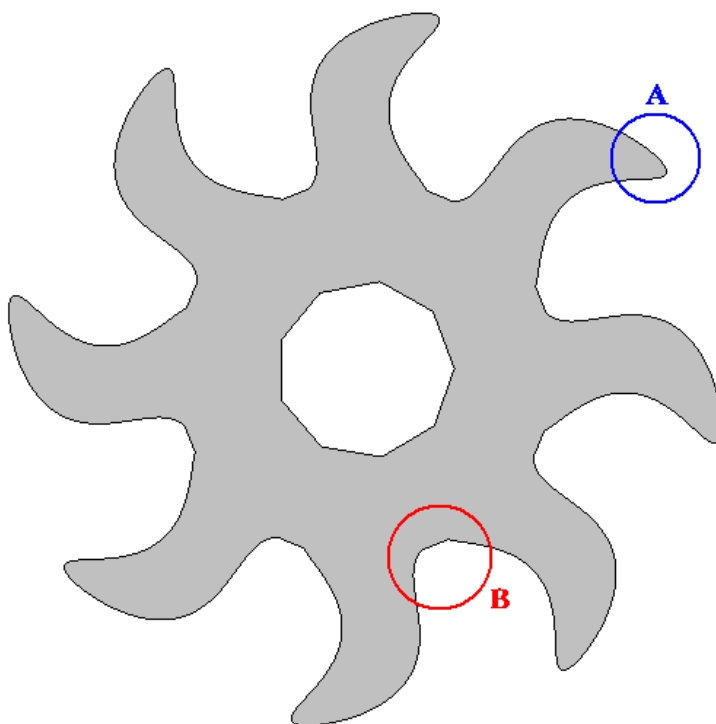
Z tabulky 5.5.2 je také patrné, že i při porovnání numerického a experimentálního řešení prvek BEAM 188 obstál dobře. Trochu větší rozdíl lze přičíst špatnému odečtení hodnot z měřicího přístroje.

6. Použití numerického řešení na profilu s neznámým analytickým řešením

Ověřené řešení v programu ANSYS pomocí prvku dvou uzlového BEAM 188 použijeme na hřídelku vymyšleného hvězdicovitého tvaru (Obr. 6.1) a délky $L = 1000 \text{ mm}$. Tuto hřídelku zatížíme stejně jako v předchozích příkladech na jednom konci kroutícím momentem $MK = 36788 \text{ Nmm}$ a druhý konec vetkneme. U tohoto řešení neznáme analytické řešení, proto budeme sledovat průběhy napětí a deformací jestli přibližně odpovídají našim předpokladům.

Předpoklad:

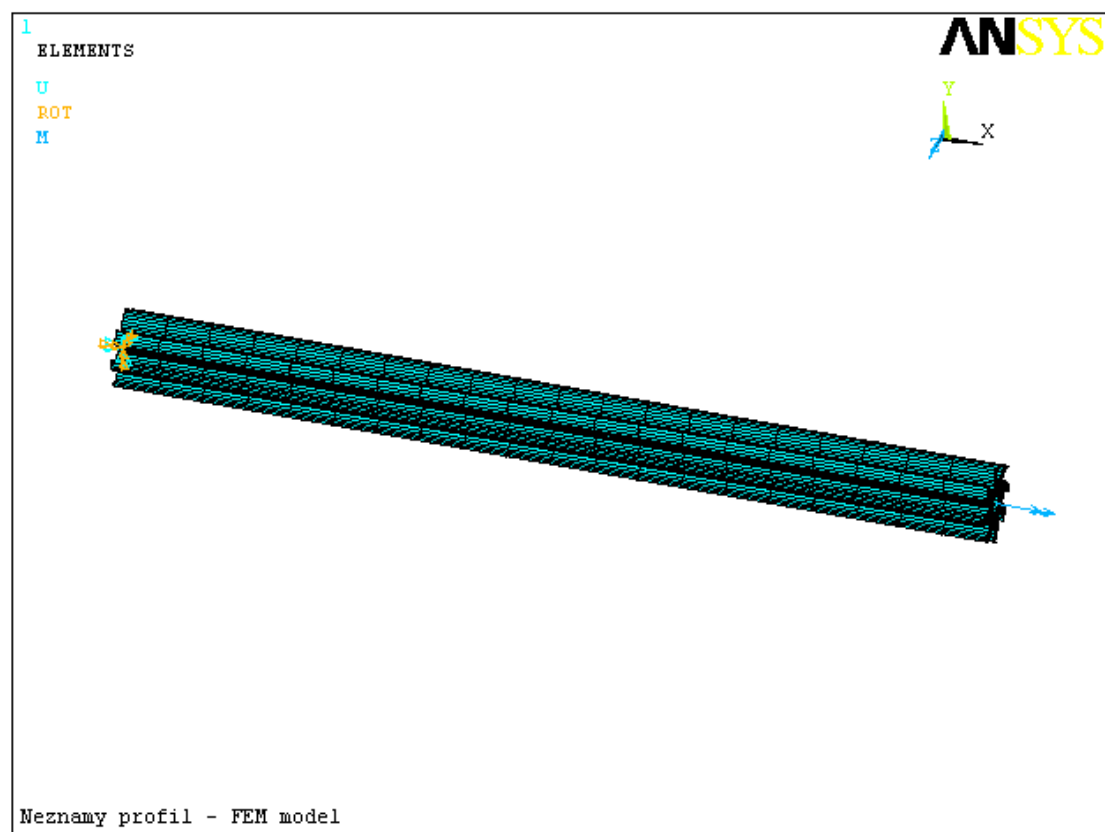
Největší celkové posunutí je předpokládáno na koncích jednotlivých zubů (Obr.6.1 – místo A) a největší napětí na dně zubové mezery (Obr.6.1 – místo B).



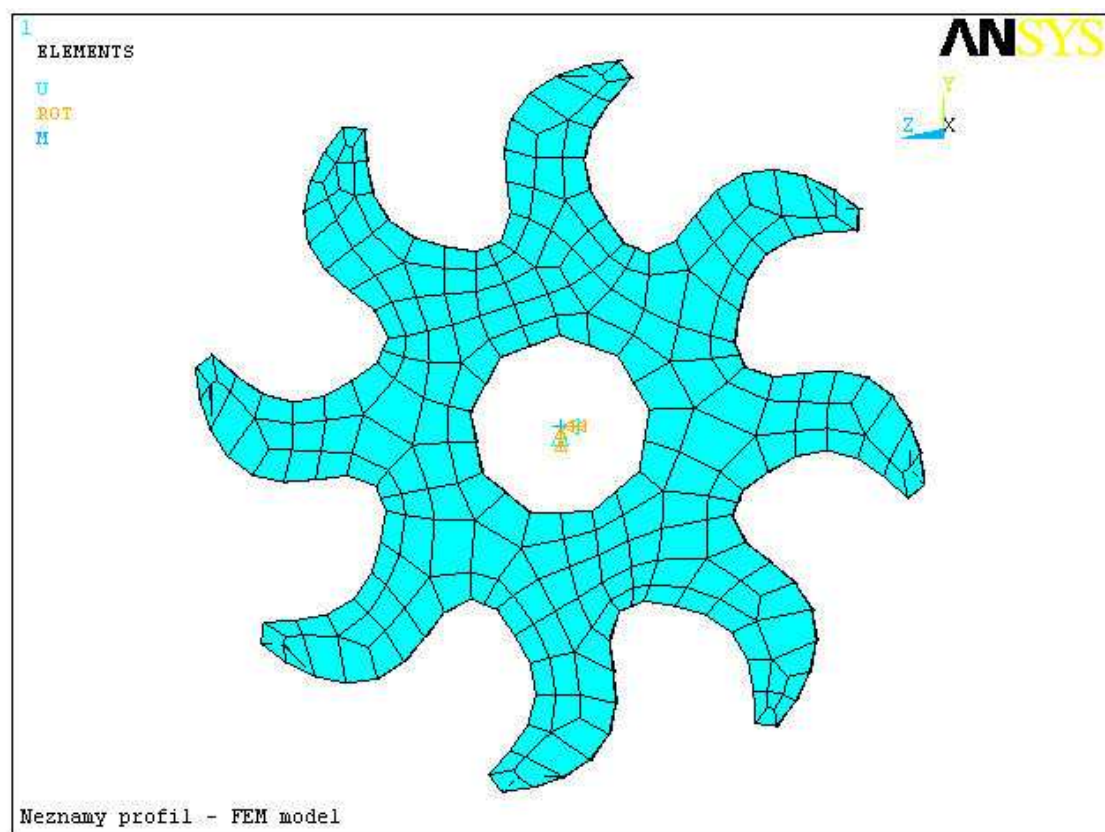
Obr. 6.1

Použitý element	BEAM 188
Počet elementů	20
Velikost hrany elementu	50 mm
Počet uzlů	21

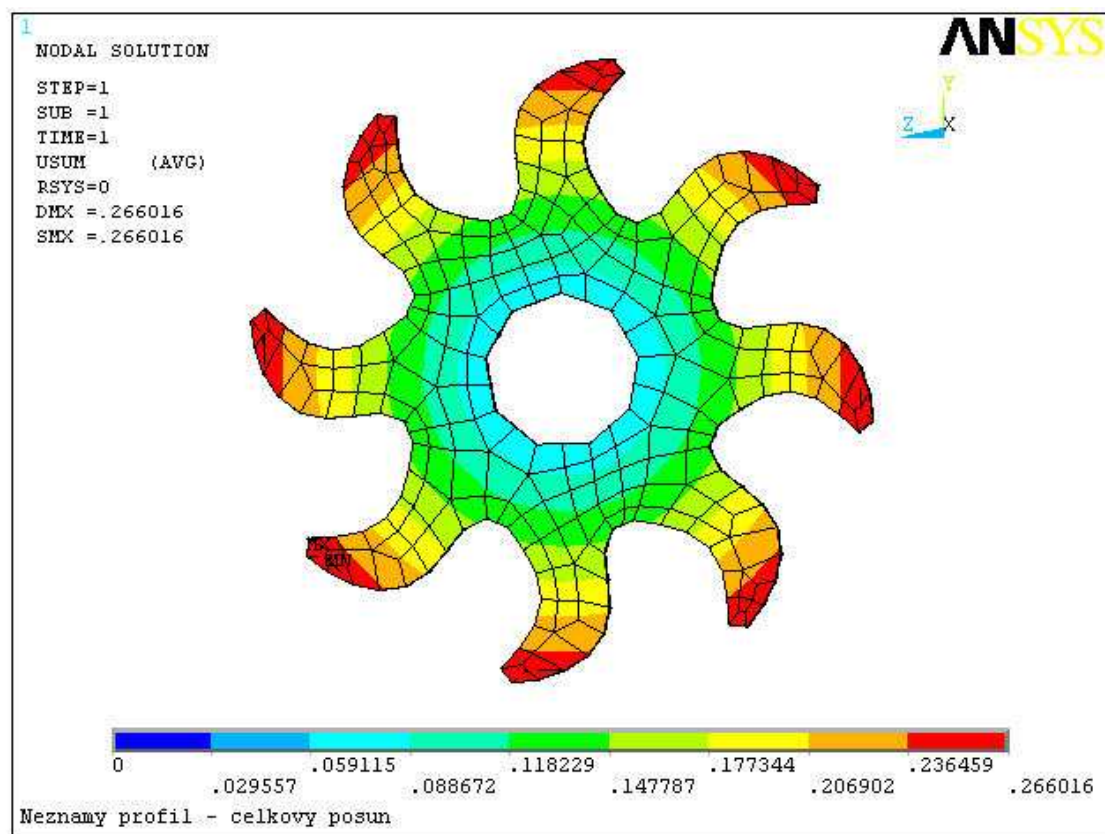
Tab. 6.1



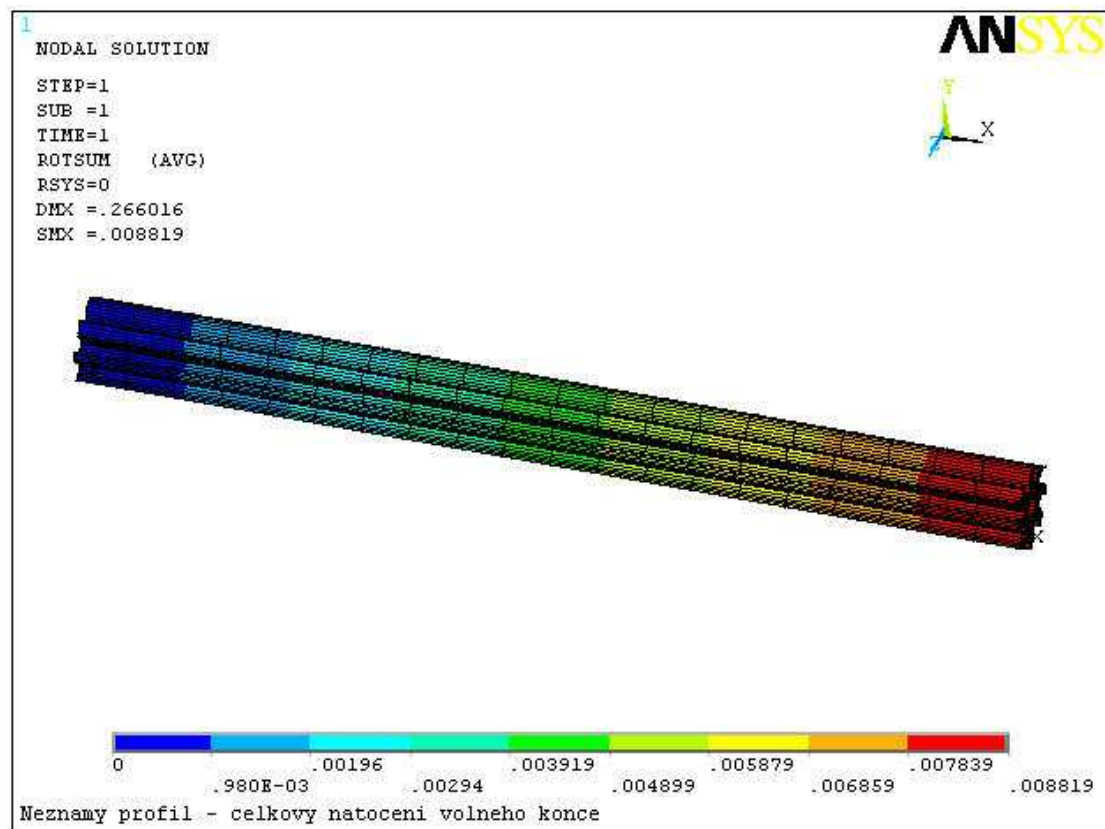
Obr. 6.2



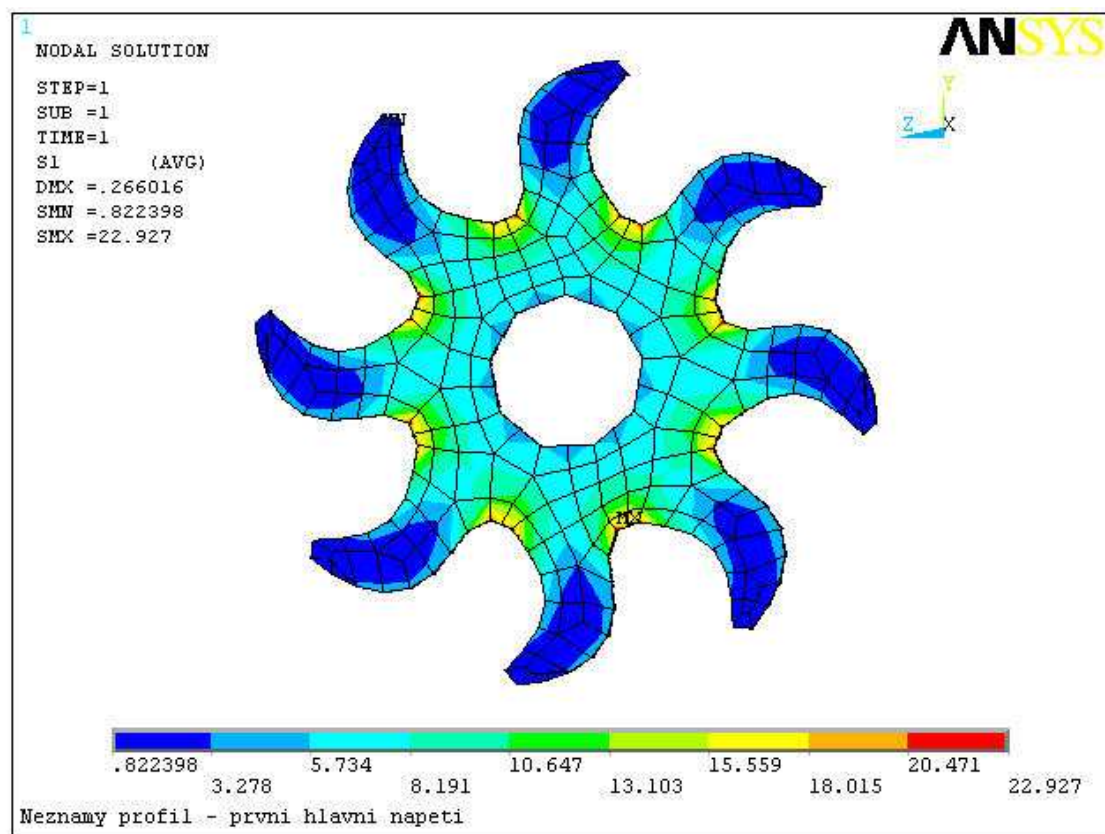
Obr. 6.3



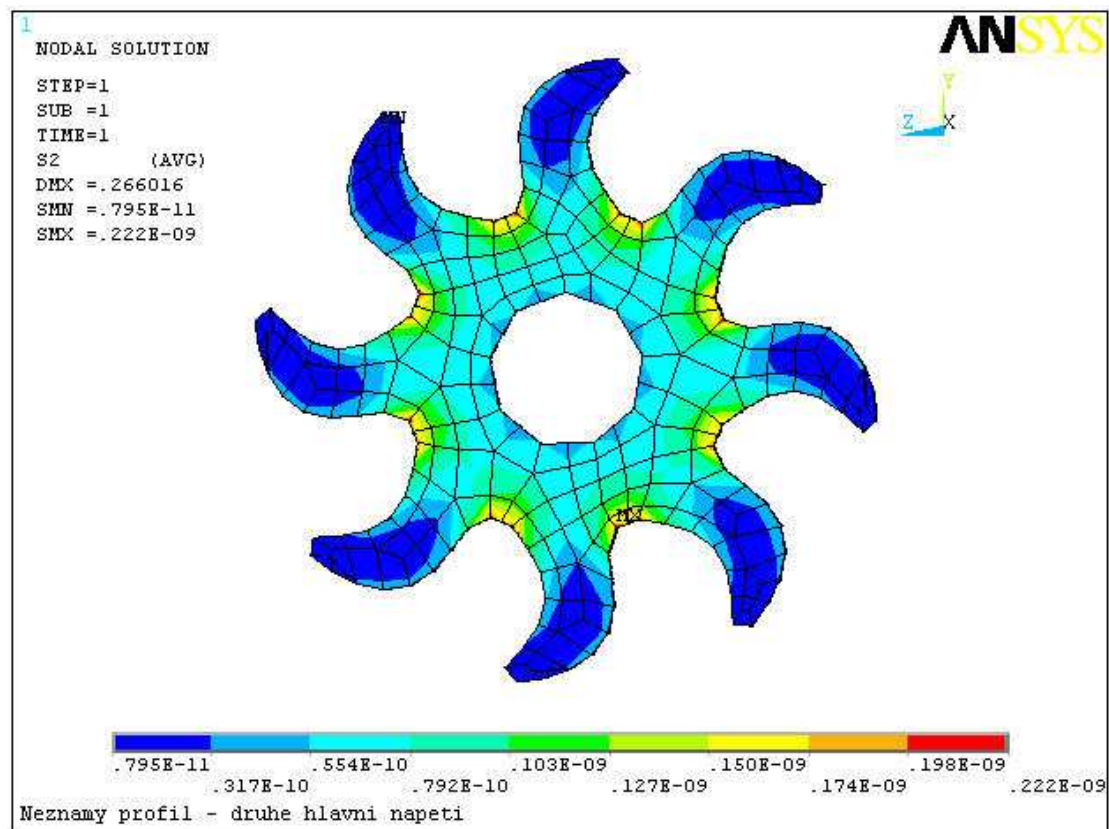
Obr. 6.4



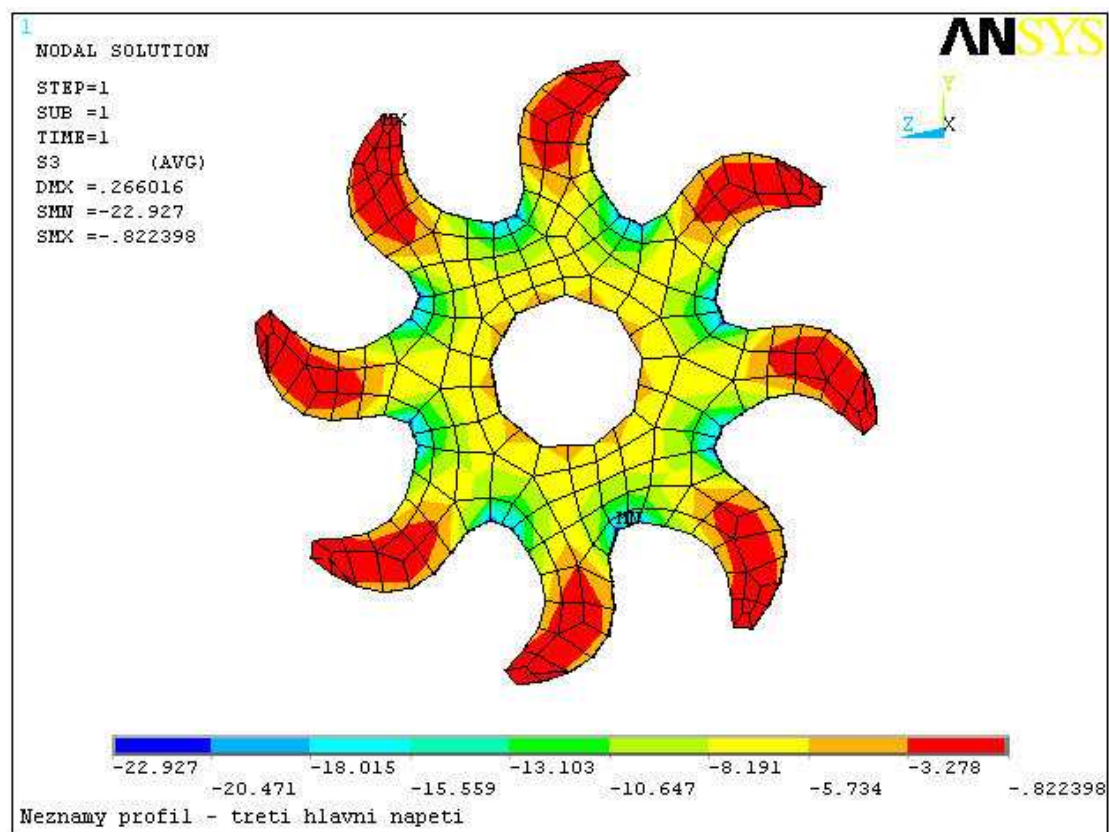
Obr. 6.5



Obr. 6.6



Obr. 6.7



Obr. 6.8

Z obrázků (6.4 a 6.5) je vidět, že průběh deformací - celkového posunutí a natočení volného konce odpovídá našemu předpokladu. Z obrázků (6.6, 6.7 a 6.8) je vidět, že i průběhy napětí jsou shodné s našim předpokladem. Protože naše předpoklady byly splněny, můžeme tedy předpokládat, že tyto výsledky jsou správné.

7. Závěrečné zhodnocení

Bakalářská práce se zabývá řešením nekruhových průřezů zatížených čistým krutem, tedy bez působení jiných vnějších zatížení. Na rozdíl od kruhového průřezu, kde je rozložení napětí známe, tak u nekruhových průřezů ho lze vypočítat pouze pro některé zvláštní jednoduché příklady (elipsa, čtverec, obdélník atd.).

V teoretické části jsou popsány dvě teorie: Saint-Venantova teorie pro krut (viz kapitola 1) a Prandtlova membránová analogie (viz kapitola 2). Tyto dvě teorie jsou použity pro výpočet analytického řešení rozložení napětí a deformace daných obdélníkových průřezů. Díky tomu lze ověřit správnou funkčnost prvku BEAM 188 použitého při numerickém řešení pomocí výpočtového programu ANSYS založeného na metodě MKP.

Dále byl proveden experiment v laboratoři katedry pružnosti a pevnosti, při kterém byl zatížen tenkostěnný obdélník čistý krutem (viz kapitola 5.3). Výsledky tohoto experimentu byly dále použity pro kontrolu správné funkčnosti prvku BEAM 188. Pomocí těchto výsledků byla také ověřena správnost teorií použitých v teoretické části a to především Prandtlovu membránovou analogii.

Při porovnání výsledků bylo zjištěno, že prvek BEAM 188 (při použití jeho dvou uzlové formy a při daném nastavení) udává správné výsledky nejen číselně, ale i graficky odpovídající průběhy napětí a deformací. A to jak pro plný profil (Tab. 4.4) tak pro tenkostěnný uzavřený profil (Tab. 5.5.1 a 5.5.2).

Zjištěné výsledky byly poté použity při řešení zkrucovaného profilu s neznámým analytickým řešením. I zde bylo dosaženo výsledků, které odpovídaly našim předpokladům. Proto lze doporučit prvek BEAM 188 pro řešení jakéhokoliv profilu.

8. Seznam použitých pramenů

- [1] Lenert, J.: *Pružnost a pevnost II*, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 1998
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69*, SNTL – nakladatelství technické literatury, Brno, 1989
- [3] Hájek, E., Reif, P., Valenta, F.: *Pružnost a pevnost I*, SNTL – nakladatelství technické literatury, Brno, 1988
- [4] Fuxa, J., Adámková, L.: *Sbírka příkladů z pružnosti a pevnosti II, 2.část*, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 2008
- [5] Macura, P.: *Experimentální metody v pružnosti a plasticitě*, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 2006
- [6] Macura, P.: *Sbírka úloh z experimentální pružnosti*, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 2008

9. Poděkování:

Na tomto místě bych rád poděkoval pracovníkům zkušební laboratoře katedry pružnosti a pevnosti. Hlavně pak panu prof. Ing. Pavlovi Macurovi, DrSc. za pomoc s realizací experimentálního měření. Dále bych rád poděkoval panu Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. za cenné rady.